

## Ο ελκυστής του Lorenz

### Τι είναι ελκυστής;

Ως ελκυστής (attractor) συνήθως ορίζεται "ένα πεπερασμένο σύνολο το οποίο έλκει τροχιές". Ο ορισμός αυτός προέρχεται και βρίσκει συνήθως εφαρμογή στη μελέτη δυναμικών συστημάτων στο χώρο των φάσεων τους.

Συνοπτικά, η μελέτη αυτή, η οποία καθιερώθηκε κυρίως από τον Hamilton, χρησιμοποιεί ένα χώρο με αριθμό διαστάσεων ίσο με τον αριθμό των σημαντικών μεταβλητών του προβλήματος. Για παράδειγμα το εκκρεμές συνήθως μελετάται σε διδιάστατο χώρο φάσεων όπου η μια διάσταση αντιστοιχεί στην ταχύτητα και η άλλη στο χρόνο. Η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος στο χώρο φάσεων είναι συνήθως μια γραμμή, η οποία ονομάζεται τροχιά. Όταν οι τροχιές που προέρχονται από διαφορετικές αρχικές συνθήκες του δυναμικού συστήματος συγκλίνουν προς κάποιο σύνολο, το σύνολο αυτό λέγεται ελκυστής. Πρακτικά, ο ελκυστής αντιπροσωπεύει την τελική κατάσταση προς την οποία οδεύει η εξέλιξη ενός δυναμικού συστήματος.

Συνηθέστερες μορφές ελκυστών σε γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι το σημείο και ο (οριακός) κύκλος. Στα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα εμφανίζονται ελκυστές με "περίεργες" μορφές και προκλητικές μαθηματικές ιδιότητες. Από τους πρώτους τέτοιους "περίεργους" ελκυστές ήταν αυτός του Lorenz.<sup>[1]</sup>

### Το σύστημα των εξισώσεων

Στις αρχές της δεκαετίας του '60, ο Lorenz μελετούσε μια απλοποιημένη από τον Saltzman περιγραφή διδιάστατης ροής.<sup>[2]</sup> Μετεωρολόγος στο επάγγελμα, ο Lorenz έψαχνε τότε τρόπους περιγραφής των ροών μάζας και θερμότητας στα ατμοσφαιρικά συστήματα. Από το σύστημα του Saltzman, ο Lorenz απομόνωσε τρεις κρίσιμες μεταβλητές, τις εξής:

- $x$ , ανάλογη με την ένταση της συναγωγής,
- $y$ , ανάλογη με τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ ανερχόμενων και κατερχόμενων ρευμάτων,
- $z$ , ανάλογη με την απόκλιση της κάθετης θερμοκρασιακής κατανομής από τη γραμμικότητα.

Ο συσχετισμός αυτών των μεταβλητών περιγράφεται από το διπλανό σύστημα:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sigma \cdot (y(t) - x(t))$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t)z(t) + rx(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)y(t) - bz(t)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 1$$

όπου:

$$\sigma = \frac{\nu}{k} \quad \text{ο αριθμός Prandtl}$$

$$r = \frac{Ra}{Ra_c} \quad \text{το πηλίκο του αριθμού Rayleigh προς τον κρίσιμο αριθμό Rayleigh}$$

$$b \quad \text{γεωμετρικός παράγοντας}$$

Ο Lorenz θεώρησε ότι:

$$\sigma := 10 \quad b := \frac{8}{3} \quad r := 28$$

### Λύση των εξισώσεων Lorenz

Το Mathcad, στις νεότερες εκδόσεις του, προσφέρει τη δυνατότητα επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων μέσω συμβολισμού παραπλήσιου με τον αναλυτικό και παρόμοιου με αυτόν που χρησιμοποιείται για την επίλυση αλγεβρικών συστημάτων. Εάν η έκδοση που χρησιμοποιείται δεν αναγνωρίζει την Odesolve, στο τέλος του εγγράφου παρατίθεται η επίλυση με την (συμβατότερη) rkfixed.

start := 0      end := 50      steps := 6000

Given

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sigma \cdot (y(t) - x(t)) \quad x(\text{start}) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t)z(t) + rx(t) \quad y(\text{start}) = 1$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)y(t) - bz(t) \quad z(\text{start}) = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t, \text{end}, \text{steps} \right]$$

Στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζεται η γραφική απεικόνιση της τριάδας (x,y,z) καθώς και η εξέλιξη της κάθε μιας από αυτές τις ποσότητες με το χρόνο. Ενώ η εξέλιξη της κάθε ποσότητας είναι απρόβλεπτη και δεν παρουσιάζει αναγνωρίσιμες μορφές, η συνολική εξέλιξη της τριάδας σχηματίζει τον ελκυστή του Lorenz, δηλαδή μια σαφή, αναγνωρίσιμη μορφή.

Το χαρακτηριστικό που τράβηξε το ενδιαφέρον στη μελέτη της λύσης είναι το εξής: *ενώ για μικρές μεταβολές των αρχικών συνθηκών ή των παραμέτρων σ, b και r η εξέλιξη κάθε μεταβλητής με το χρόνο αλλάζει δραματικά, η μορφή του ελκυστή παραμένει ως έχει.*

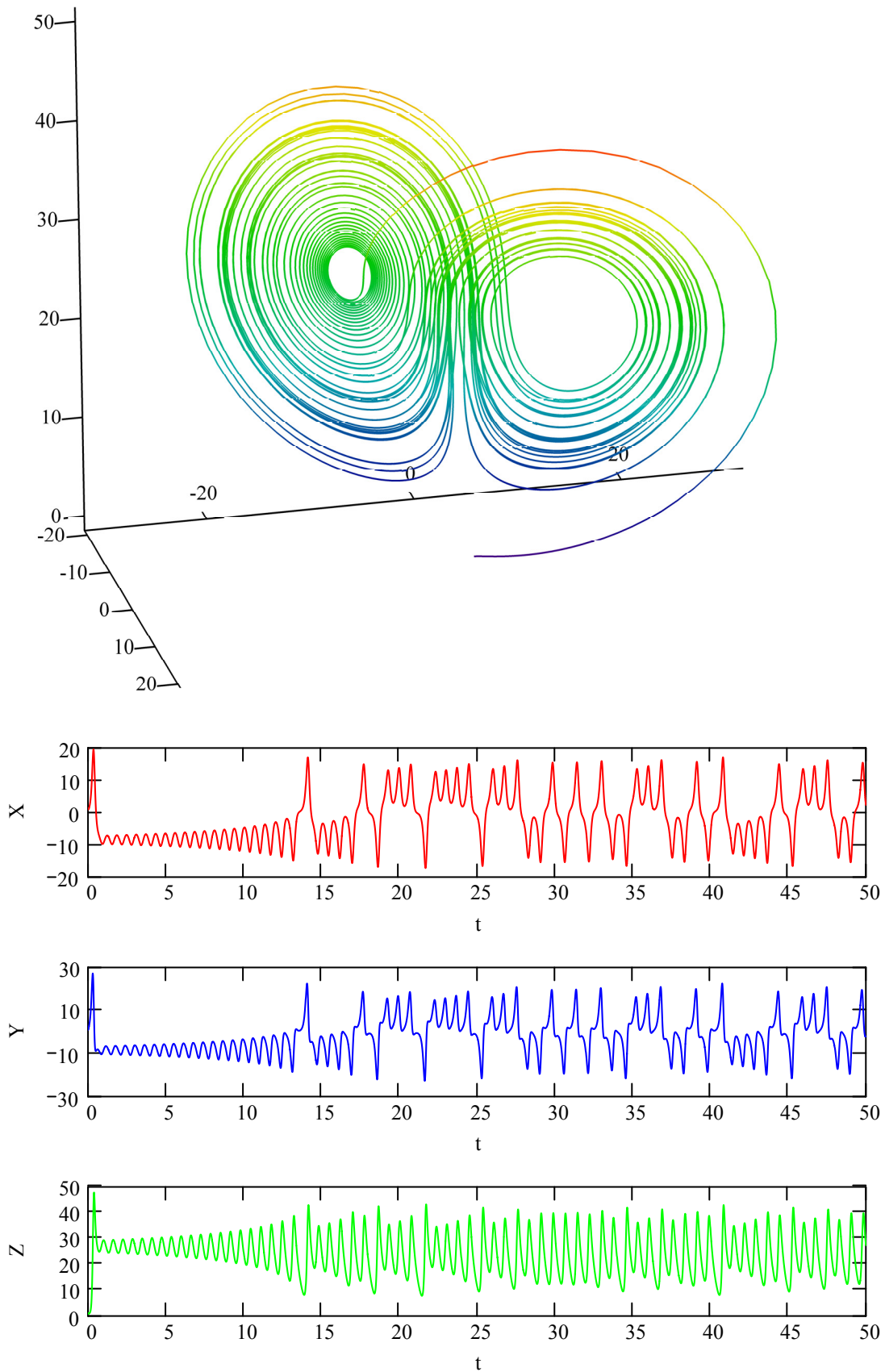
Τα γραφήματα της επόμενης σελίδας μπορούν να μετατραπούν σε κινούμενα (animation), ώστε να καταστεί πιο παραστατική η εξέλιξη των ποσοτήτων x,y,z συναρτήσει του χρόνου. Για τη δημιουργία του animation θα πρέπει να γίνουν τα εξής βήματα:

1. Από το μενού Tools, επιλέξτε Animation -> Record.
2. Επιλέξτε όλη την περιοχή των γραφημάτων με το ποντίκι, κάνοντας κλικ στην πάνω αριστερή πλευρά του πρώτου γραφήματος και μετακινώντας το δείκτη, με πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, μέχρι την κάτω δεξιά πλευρά του τελευταίου γραφήματος.
3. Στο παράθυρο διαλόγου που άνοιξε μετά την εντολή Animation -> Record, δώστε στη μεταβλητή FRAME τιμές από 1 έως 300, με βήμα 20 frames/sec και πατήστε το Animate.
4. Το video που θα δημιουργηθεί μπορεί να σωθεί και να αναπαραχθεί ανεξάρτητα από το Mathcad.

 Υπολογισμοί animation

Στο πρώτο γράφημα παρουσιάζεται η τροχιά του συστήματος Lorenz στο χώρο φάσεων  $[x,y,z]$ . Στα επόμενα τρία γραφήματα παρουσιάζεται η μεταβολή του  $x$ , του  $y$  και του  $z$  αντίστοιχα, συναρτήσει του χρόνου  $t$ .

Ο ελκυστής του Lorenz



## Αναφορές

1. Lorenz, Edward N., "*Deterministic nonperiodic flow*". Journal of Atmosph.Sci. 20:130. 1963
2. Μια πολύ καλή περιγραφή των εξισώσεων διδιάστατης ροής που οδήγησαν στις εξισώσεις του Lorenz δίνεται στη διεύθυνση <http://mathworld.wolfram.com/LorenzAttractor.html>

▶ Λύση με τη μέθοδο rkfixed

---