

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Τα θέματα θα υποβληθούν ηλεκτρονικά μαζί με τον αλγόριθμο επίλυσης

Ακολουθώντας τα τυπικά βήματα επίλυσης προβλήματος:

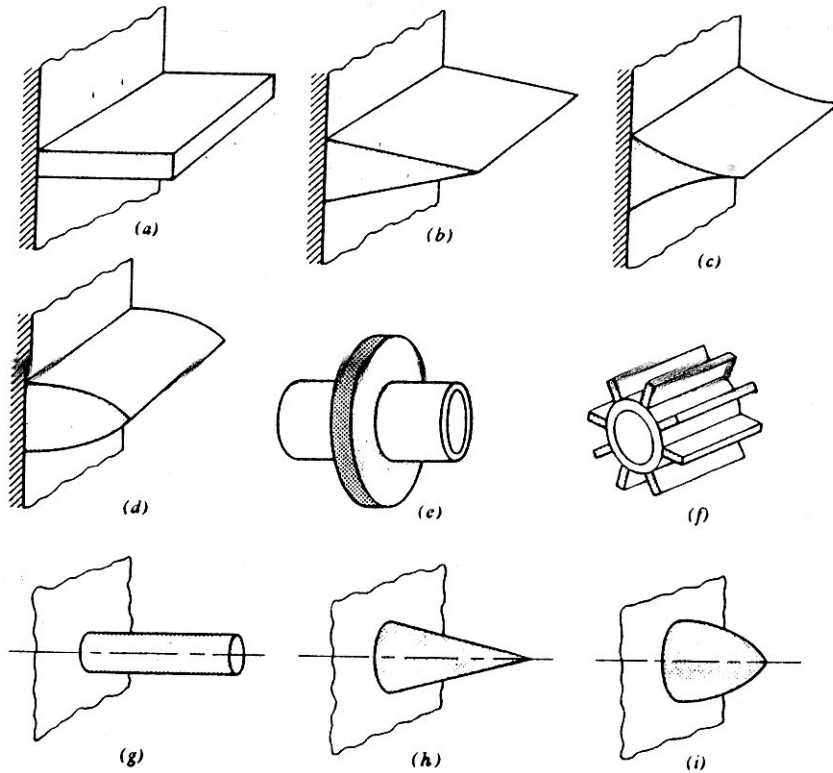
- Λεκτική περιγραφή- πρακτική σημασία του προβλήματος-βιβλιογραφική επισκόπηση
- Μαθηματική θεμελίωση
- Αδιαστατοποίηση
- Διακριτοποίηση
- Αλγόριθμος επίλυσης
- Έλεγχος ανεξαρτησίας πλέγματος-αξιοπιστία
- Κριτική αξιολόγηση αποτελεσμάτων
- Παραμετρική διερεύνηση

Κάθε θέμα έχει συμμετοχή στο βαθμό 15%

(μπορείτε να επιλύσετε μέχρι 2 θέματα από κάθε ομάδα)

A. ΟΜΑΔΑ

1. Να λυθεί αριθμητικά το συζευγμένο πρόβλημα της θέρμανσης και εξάτμισης σφαιρικής σταγόνας με την μέθοδο Runge Kutta και Euler χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό συντεταγμένων για τη κίνηση της επιφάνειας.
2. ΓΙΑ ΔΟΣΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΤΕΡΥΓΙΟΥ, ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟΤΕΡΟ ΠΤΕΡΥΓΙΟ ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ a, b, c ΚΑΙ d ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ.



$$\frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{dT_{\text{fin}}(x)}{dx} \right] - \frac{h(x)}{k} \frac{dS(x)}{dx} [T_{\text{fin}}(x) - T_{\infty}] = 0$$

$$T_{\text{fin}}(x) = T_b \quad \text{at } x = x_b$$

$$\frac{dT_{\text{fin}}(x)}{dx} = 0 \quad \text{at } x = x_t$$

3. Να επιλυθεί αριθμητικά το πρόβλημα του πτερυγίου ψύξης (του βιβλίου) με ακρίβεια διακριτοποίησης $4^{\text{ης}}$ τάξης. Η επίλυση του συστήματος να γίνει με την επαναληπτική διαδικασία ή με απαλοιφή Gauss.
4. Να μελετηθεί αριθμητικά η ταλάντωση εκρεμούς (απλού ή διπλού) υπό την επίδραση εξωτερικής γραμμικής ή μη δύναμης. Να βρεθεί η χαοτική

κατάσταση του εκρεμούς για διάφορες μη γραμμικότητες καθώς και να υπολογισθούν ο εκθέτης Liapunov, οι τομές Poincare και η κλασματική διάσταση του ελκυστή στο διάγραμμα φάσεων. Να εξετασθούν όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί (π.χ ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση ή με απόσβεση. Γραμμική εξωτερική διέγερση-διακροτήματα-συντονισμός με απόσβεση. Μη γραμμική διέγερση με διάφορα επίπεδα μη γραμμικότητας). Η παρουσίαση του θέματος μπορεί να γίνει σε Power Point.

5. Ένα εκκρεμές Foucault διέπεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\ddot{x} + 2\sin 2\varphi \dot{y} + \omega^2 x = 0$$

Όπου $x(t)$, $y(t)$ οι συντεταγμένες του άκρου του εκκρεμούς, φ το γεωγραφικό πλάτος του τόπου και $k^2 = g/l$ όπου l το μήκος του εκκρεμούς, με $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$. Να υπολογισθεί η τροχιά του άκρου του εκκρεμούς, η γωνία στροφής του επιπέδου ταλάντωσης με τον χρόνο και το διάγραμμα φάσεων για γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 35^\circ$ βόρειο.

6. Σωλήνας κυκλικής διατομής μήκους L και διαμέτρου D βρίσκεται κάτω από το χώμα σε βάθος 5 μέτρων. Νερό ταχύτητας U_0 και θερμοκρασίας T_0 εισέρχεται στον σωλήνα. Δεχόμενοι ότι η διανομή ταχύτητας του νερού στον σωλήνα είναι πλήρως αναπτυγμένη, να βρείτε την μεταβολή της θερμοκρασίας στο νερό σε διάφορες θέσεις κατά μήκος του σωλήνα καθώς και το συνολικό ποσόν θερμότητας που το νερό συναλλάσσει με το έδαφος. Δεχθείτε θερμοκρασία εδάφους σταθερή ίση με $T_{εδ}$ και εξετάστε δύο περιπτώσεις θερμοκρασιών νερού ($T_0 > T_{εδ}$ και $T_0 < T_{εδ}$). Δεχθείτε ροή παραβολικού τύπου, στρωτή ροή (παραδοχή λανθασμένη) ή μοντέλο μίξης Prandtl για τυρβώδη ροή. Πόσο μήκος σωλήνα διαμέτρου 0,05 m χρειάζεσθε για ψύξη ή θέρμανση του νερού κατά 10 οC.

7. Να υπολογίσετε την ανάπτυξη του στρωτού οριακού στρώματος κατά μήκος επίπεδης πλάκας χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό συντεταγμένων. Να υπολογίσετε την ταχύτητα απορρόφησης του οριακού στρώματος μέσω της

πλάκας ώστε το πάχος του οριακού στρώματος να παραμένει σταθερό μετά από μια τιμή προκαθορισμένη (βλέπε κεφ. 6^ο, επίλυσης της ροής).

8. Να υπολογίσετε τη θερμική αδράνεια οικοδομικών υλικών που χρησιμοποιούνται στη κατασκευή τοιχοποιίας πάχους 20 εκατοστών (κυρίως τούβλο, μπετόν, σοφάς) και να απαντήσετε στο ερώτημα πόσο χρόνο χρειάζεται να θερμανθεί ο εσωτερικός τοίχος μιας κατοικίας το χειμώνα αρχικής θερμοκρασίας (εξωτερική θερμοκρασία) 5 °C στους 20 °C (οι θερμοκρασίες εσωτερικές και εξωτερικές θεωρούνται σταθερές με τον χρόνο).
9. Να υπολογισθεί η μεταβολή της θερμοκρασίας με τον χρόνο του νερού σε ηλιακό λέβητα (διδιάστατο) διαστάσεων X_0 και Y_0 . Δεχθείτε ότι η ηλιακή ακτινοβολία προσπίπτει στην κατακόρυφη πλευρά του λέβητα, ενώ οι άλλες είναι μονωμένες. Να υπολογισθεί η θερμοκρασία για 24 ώρες (βλέπε κεφ. 6^ο, επίλυση εξίσωσης στροβιλότητας, προσοχή στον όρο πηγής της εξίσωσης στροβιλότητας λόγω άνωσης).
10. Να υπολογισθεί το πεδίο συγκέντρωσης ρυπαντών το οποίο προέρχεται από συνεχή εκπομπή πηγής μέσα σε πεδίο ταχυτήτων παράλληλης ροής $u(z)$ και $v=w=0$

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

Να δεχθείτε ότι

$$k_z = k_{u*} z \Phi_m \left(\frac{z}{L} \right), \quad \frac{k_y}{\sqrt{u_y'^2}} = \frac{k_z}{\sqrt{u_z'^2}},$$

11. Ως ανωτέρω αλλά για γραμμική πηγή

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

12. Να υπολογισθεί το πεδίο συγκεντρώσεων ρυπαντών από στιγμιαία εκπομπή σημειακής πηγής μέσα σε πεδίο παράλληλης ροής $u=u(z)$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

13. Η διανομή ταχύτητας σε δέσμη στρωτής ροής που εξέρχεται σε ακίνητο ρευστό υπακούει στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$,0233 = \dots + \dots \text{ για } n \rightarrow \infty$$

Να ευρεθεί η διανομή ταχυτήτων

(προηγουμένως να παρουσιασθεί αναλυτικά το φαινόμενο και να εξαχθεί η εξίσωση από τις εξισώσεις Navier-Stokes)

B. ΟΜΑΔΑ

13. Να υπολογισθεί το πεδίο συγκεντρώσεων και ταχυτήτων ανέμου μέσα σε δρόμο αστικής περιοχής με άνεμο κάθετο στην κατεύθυνση του δρόμου

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\zeta$$

$$\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

Όπου Φ =στροβιλότητα και συγκέντρωση ρυπαντών (ζ και C).

$$\text{Δεχθείτε } k_y = k_z = 0,4u_* z \Phi_n \left(\frac{z}{L} \right)$$

14. Να υπολογισθεί το πεδίο ταχυτήτων και θερμοκρασιών που δημιουργείται στο παθητικό σύστημα θέρμανσης του τοίχου Trombe

15. Να υπολογισθεί η πλήρως ανεπτυγμένη ροή σε σωλήνα ορθογωνικής διατομής, για διάφορους λόγους επιμήκους κι αριθμούς Reynolds (ανεξαρτησία πλέγματος, πλέγμα ανομοιομόρφο).

16. Να υπολογισθεί η διανομή θερμοκρασίας σε διδιάσταση πλάκα με μεθόδους Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, ADI (πλέγμα 10x10, 20x20). Για το ίδιο πλέγμα να ευρεθεί η ταχύτερη μέθοδος και με την ταχύτερη να λυθεί το πρόβλημα για διάφορους λόγους επιμήκους (λύση ανεξάρτητη πλέγματος).

17. Να διερευνηθεί η ροή σε σωλήνα με απότομη διεύρυνση (μέθοδος Ψ, ζ), για διάφορους λόγους διεύρυνσης (1:2, 1:3, 1:4). Να λυθεί το πρόβλημα για μισό κι ολόκληρο αγωγό. (1:2, R_e).

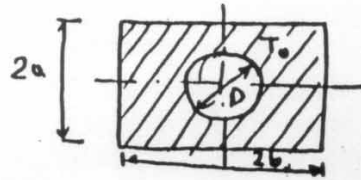
18. Να υπολογισθεί η διανομή της θερμοκρασίας και η θερμορροή προς το δωμάτιο κατά την διάρκεια 24 ωρών μιας ταράτσας με

- Θερμική μόνωση
- Χωρίς θερμική μόνωση

(εσωτερική θερμοκρασία δωματίου, σταθερή 20°C)

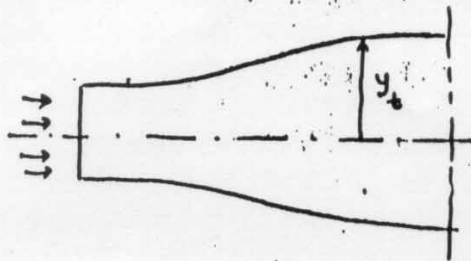
19. Δοχείο (μονοδιάστατο) περιέχει νερό θερμοκρασίας 0°C . Ξαφνικά το ένα άκρο του τίθεται σε σταθερή θερμοκρασία -5°C , ενώ τα άλλο άκρο του παραμένει θερμικά μονωμένο. Να υπολογισθεί το πεδίο θερμοκρασιών μέσα στο δοχείο, η θέση του μετώπου του πάγου και η ταχύτητα κίνησης του (πρόβλημα Stefan. Θα επιλυθεί με μετασχηματισμό συντεταγμένων ή με επίλυση ενθαλπίας αντί θερμοκρασίας)

1. Να ευρεθεί η διανομή της θερμοκρασίας σε ράβδο απείρου μήκους η οποία έχει την διατομή του σχήματος. Η ράβδος αρχικά βρίσκεται σε θερμοκρασία T_0 και ξαφνικά εμβαπτίζεται σε ρουτρό σταθερής θερμοκρασίας T_η . Να χρησιμοποιηθεί ρητή έκφραση διαφορών.



T_η : Μεταθερημένη
 $y' = y/(a, b)$

2. Να υπολογιστεί η η : ^{σπρωξη} αερίων στην παρήκταση ροή σε "αποκλίνον" ακροφύσιο μετασχηματίζοντας την γεωμετρία του ακροφυσίου σε ορθογωνική διατομή.



$$y' = \frac{y}{y_+(x)}$$

3. Να υπολογιστεί η ανάπτυξη του ομόρου πίσω από επίπεδη πλάκα μέσα σε παράλληλη ροή. (μεξή των δύο οριακών στρωμάτων του επάνω και του κάτω μέρους της πλάκας) (παρατίθενται Γ_1/Γ_2 , Re)

Γ ΟΜΑΔΑ

20. Μια μεταλλική από χάλυβα καπνοδόχος θερμοηλεκτρικού σταθμού έχει ύψος 80 μέτρα, διάμετρο 5 μέτρα και πάχος ελάσματος 3 εκ. Να εξετασθεί η συμπεριφορά της σε σεισμό.

(,044222= $\partial\partial+\partial\partial\chi u E k t u r$ u μετατόπιση, E μέτρο ελαστικότητας, ρ πυκνότητα, K ακτίνα αδράνειας)

21. Να ευρεθεί η μορφή ταλάντωσης καπνοδόχου διαμέτρου D , πάχους δ , ύψος H για ημιτονοειδή εξωτερική διέγερση $F(z,t)$ που εφαρμόζεται σε κάποια θέση $z=z$ ή διέγερση λόγω αποβολής στροβίλων.
22. Να ευρεθούν οι θερμοακουστικές συχνότητες σε δακτυλιοειδή αγωγό με μετάδοση θερμότητας από τον εσωτερικό σωλήνα
23. Να λυθεί το πρόβλημα των τριών σωμάτων
(βαρύτητα 25%)
24. Να υπολογισθεί η αντοχή κολώνας με συγκεντρωμένο βάρος στην κορυφή της σε σεισμική καταπόνηση.

ΑΣΚΗΣΗ 14.6 Αλεπούδες και λαγοί

Ένα πολύ γνωστό οικοσύστημα διατυπώθηκε από τον Vito Volterra (Ιταλός, 1860–1940, δείτε, για παράδειγμα, τους Kahaner, Moler και Nash 1989 ή τους Giordano και Weir 1991). Αυτό αποτελείται από δύο πληθυσμούς, για παράδειγμα αλεπούδων και λαγών, που σχετίζονται με τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 2r - \alpha r f \\ \frac{df}{dt} &= -f + \alpha r f\end{aligned}$$

όπου r είναι ο αριθμός των λαγών και f ο πληθυσμός των αλεπούδων και ο χρόνος t δίνεται σε έτη. Χρησιμοποιήστε τη χρονορουτίνα ode23 και υπολογίστε και σχεδιάστε τη λύση του διαφορικού συστήματος, για $\alpha = 0.01$ και αρχικές συνθήκες $r_0 = 300$ και $f_0 = 150$ για το χρονικό διάστημα $[0, 25]$.

38. The motion of the compound spring system as sketched in Fig. 6.11 is given by the solution of the pair of simultaneous equations

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2),$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2(y_1 - y_2),$$

where y_1 and y_2 are the displacements of the two masses from their equilibrium positions. The initial conditions are

$$y_1(0) = A, \quad y_1'(0) = B, \quad y_2(0) = C, \quad y_2'(0) = D.$$

Express as a set of first-order equations.

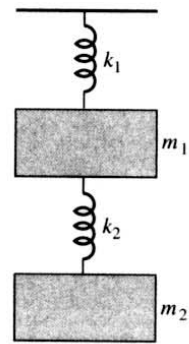


Figure 6.11

4.25 Figure P4.25 is a simplified representation of the main three rotating masses in a two-cylinder engine driving a flywheel on the same shaft.

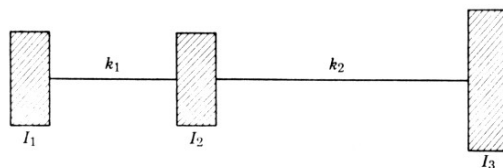


Figure P4.25

I_1 , I_2 , and I_3 are the moments of inertia ($\text{lb}_f \text{ in. sec}^2$) of the rotating masses. The shaft stiffnesses k_1 and k_2 are the torques ($\text{lb}_f \text{ in.}$) required to twist each section through unit angle. Let θ_1 , θ_2 , and θ_3 be the angular displacements of the rotating masses.

(a) By equating torque to the product of moment of inertia and angular acceleration, show that

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 &= k_1(\theta_2 - \theta_1), \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= k_1(\theta_1 - \theta_2) + k_2(\theta_3 - \theta_2), \\ I_3 \ddot{\theta}_3 &= k_2(\theta_2 - \theta_3). \end{aligned}$$

(b) Following the general pattern of Problem 4.23, compute the natural frequencies and the associated vectors of relative displacements for each mode of torsional oscillations if $I_1 = I_2 = 4$, $I_3 = 20 \text{ lb}_f \text{ in. sec}^2$, $k_1 = 8 \times 10^6$, and $k_2 = 10^7 \text{ lb}_f \text{ in./radian}$.

Η θεμελιώδης εξίσωση της θεωρίας των δοκών είναι

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI},$$

όπου x είναι η οριζόντια απόσταση κατά μήκος της δοκού, y είναι η κατακόρυφη απόκλιση προς τα κάτω, M είναι η ροπή κάμψης, E είναι η σταθερά του Young και I είναι η ροπή επιφανείας της τομής ως προς τον ουδέτερο άξονα (ροπή αδράνειας). Η ροπή επιφανείας δεν είναι αναγκαστικά σταθερά γιατί το σχήμα της διατομής της δοκού μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού (καθώς μεταβάλλεται το x).

Εύκολα μπορεί να δείχθει ότι

$$\frac{dM}{dx} = V,$$

όπου V είναι η δύναμη διάτμησης, και

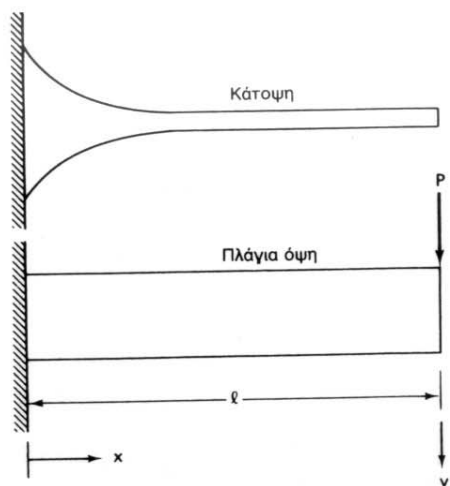
$$\frac{dV}{dx} = -w,$$

όπου $w(x)$ είναι το φορτίο της δοκού.

Έτσι παραγωγίζοντας δύο φορές την θεμελιώδη εξίσωση, παίρνουμε μετά από αντικαταστάσεις:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{2}{I} \frac{dI}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{1}{I} \frac{d^2 I}{dx^2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{w}{EI}.$$

Οι περισσότερες εφαρμογές αυτής της εξίσωσης οδηγούν σε προβλήματα συνοριακών τιμών. Όμως, το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών παρουσιάζει ενδιαφέρον από πρακτική άποψη.



Θεωρούμε έναν πρόβολο (δοκό) μεταβλητής διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα Π6-3. Η δοκός έχει μήκος ℓ και φέρει ένα βάρος P στο άκρο. Για αυτήν την περίπτωση

$$V(x) = P$$

και

$$M(x) = -P(\ell - x).$$

Έστω

$$I(x) = 5 \left(1 + 4e^{-6x/\ell} \right) \text{ in.}^4,$$

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi},$$

$$\ell = 100 \text{ in.},$$

$$P = 500 \text{ lb}_f.$$

Υπολογίστε το $y(\ell)$ υποθέτοντας ότι η δοκός δεν σπάει ούτε υφίσταται μόνιμη παραμόρφωση.

Υπόδειξη: Το “πακτωμένο” άκρο του προβόλου στο $x = 0$ συνεπάγεται $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$. Οι άλλες δύο αρχικές τιμές στο $x = 0$ μπορούν να βρεθούν από τις εξισώσεις για τα $V(0)$ και $M(0)$.

103. The velocity distribution in the laminar boundary layer formed when an incompressible fluid flows over a flat plate is related to the solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \text{and} \quad f'(\eta) \rightarrow 1 \text{ as } \eta \rightarrow \infty$$

where f is a dimensionless stream function, the velocity u is proportional to $f'(\eta)$, and η is proportional to distance normal to the plate. Solve this problem for $f(\eta)$.

104. The velocity distribution in the mixing layer that forms when a laminar free jet issues into a stagnant atmosphere is related to the solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{df}{d\eta} + \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \text{and} \quad f'(\eta) \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty$$

Solve this problem for $f(\eta)$.

The deflection of a simply supported and uniformly loaded beam is governed by the ordinary differential equation (for small deflections)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}, \quad y(0) = 0 \text{ and } y(L) = 0$$

where q is the uniform load per unit length, L is the length of the beam, I is the moment of inertia of the beam cross section, and E is the modulus of elasticity. For a rectangular beam, $I = wh^3/12$, where w is the width and h is the height. Consider a wooden beam ($E = 10,000 \text{ kN/m}^2$) 5.0 m long, 5 cm wide, and 10 cm high, which is subjected to the uniform load $q = 1500 \text{ N/m}$ on the 5 cm face. Solve for the deflection $y(x)$.

When the load on the beam described in Problem 105 is applied on the 10 cm face, the deflection will be large. In that case, the governing differential equation is

$$\frac{EI(d^2 y/dx^2)}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

For the properties specified in Problem 105, determine $y(x)$.