4.25 Figure P4.25 is a simplified representation of the main three rotating masses in a two-cylinder engine driving a flywheel on the same shaft.

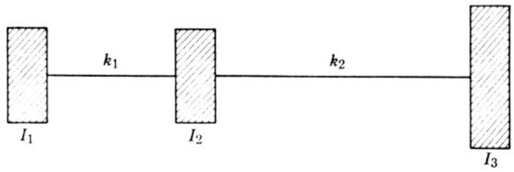


Figure P4.25

I_1, I_2, and I_3 are the moments of inertia (lb_f in. sec^2) of the rotating masses. The shaft stiffnesses k_1 and k_2 are the torques (lb_f in.) required to twist each section through unit angle. Let θ_1, θ_2, and θ_3 be the angular displacements of the rotating masses.

(a) By equating torque to the product of moment of inertia and angular acceleration, show that

$$I_1\ddot{\theta}_1 = k_1(\theta_2 - \theta_1),$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 = k_1(\theta_1 - \theta_2) + k_2(\theta_3 - \theta_2),$$
$$I_3\ddot{\theta}_3 = k_2(\theta_2 - \theta_3).$$

(b) Following the general pattern of Problem 4.23, compute the natural frequencies and the associated vectors of relative displacements for each mode of torsional oscillations if $I_1 = I_2 = 4$, $I_3 = 20$ lb_f in. sec^2, $k_1 = 8 \times 10^6$, and $k_2 = 10^7$ lb_f in./radian.

Π6-3. Η θεμελιώδης εξίσωση της θεωρίας των δοκών είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI},$$

όπου x είναι η οριζόντια απόσταση κατά μήκος της δοκού, y είναι η κατακόρυφη απόκλιση προς τα κάτω, M είναι η ροπή κάμψεως, E είναι η σταθερά του Young και I είναι η ροπή επιφανείας της τομής ως προς τον ουδέτερο άξονα (ροπή αδράνειας). Η ροπή επιφανείας δεν είναι αναγκαστικά σταθερά γιατί το σχήμα της διατομής της δοκού μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού (καθώς μεταβάλλεται το x).

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι

$$\frac{dM}{dx} = V,$$

όπου V είναι η δύναμη διάτμησης, και

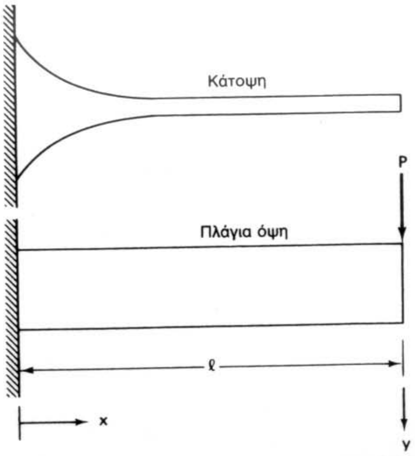
$$\frac{dV}{dx} = -w,$$

όπου $w(x)$ είναι το φορτίο της δοκού.

Έτσι παραγωγίζοντας δύο φορές την θεμελιώδη εξίσωση, παίρνουμε μετά από αντικαταστάσεις:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{2}{I}\frac{dI}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{I}\frac{d^2I}{dx^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{w}{EI}.$$

Οι περισσότερες εφαρμογές αυτής της εξίσωσης οδηγούν σε προβλήματα συνοριακών τιμών. Όμως, το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών παρουσιάζει ενδιαφέρον από πρακτική άποψη.



Θεωρούμε έναν πρόβολο (δοκό) μεταβλητής διατομής όπως φαίνεται στο Σχήμα Π6-3. Η δοκός έχει μήκος ℓ και φέρει ένα βάρος P στο άκρο. Για αυτήν την περίπτωση

$$V(x) = P$$

και

$$M(x) = -P(\ell - x)\,.$$

Έστω

$$I(x) = 5\left(1 + 4e^{-6x/\ell}\right) \text{ in.}^4,$$
$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi},$$
$$\ell = 100 \text{ in.},$$
$$P = 500 \text{ lb}_f\,.$$

Υπολογίστε το $y(\ell)$ υποθέτοντας ότι η δοκός δεν σπάζει ούτε υφίσταται μόνιμη παραμόρφωση.

Υπόδειξη: Το "πακτωμένο" άκρο του προβόλου στο $x = 0$ συνεπάγεται $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$. Οι άλλες δύο αρχικές τιμές στο $x = 0$ μπορούν να βρεθούν από τις εξισώσεις για τα $V(0)$ και $M(0)$.

103. The velocity distribution in the laminar boundary layer formed when an incompressible fluid flows over a flat plate is related to the solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d^3f}{d\eta^3} + \frac{1}{2}f\frac{d^2f}{d\eta^2} = 0, \qquad f(0) = 1,\ f'(0) = 0, \quad \text{and} \quad f'(\eta) \to 1 \text{ as } \eta \to \infty$$

where f is a dimensionless stream function, the velocity u is proportional to $f'(\eta)$, and η is proportional to distance normal to the plate. Solve this problem for $f(\eta)$.

104. The velocity distribution in the mixing layer that forms when a laminar free jet issues into a stagnant atmosphere is related to the solution of the ordinary differential equation

$$\frac{d^3f}{d\eta^3} + f\frac{df}{d\eta} + \left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 = 0, \qquad f(0) = 0, f'(0) = 0, \text{ and } f'(\eta) \to 0 \text{ as } \eta \to \infty$$

Solve this problem for $f(\eta)$.

105. The deflection of a simply supported and uniformly loaded beam is governed by the ordinary differential equation (for small deflections)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}, \qquad y(0) = 0 \text{ and } y(L) = 0$$

where q is the uniform load per unit length, L is the length of the beam, I is the moment of inertia of the beam cross section, and E is the modulus of elasticity. For a rectangular beam, $I = wh^3/12$, where w is the width and h is the height. Consider a wooden beam ($E = 10{,}000$ kN/m^2) 5.0 m long, 5 cm wide, and 10 cm high, which is subjected to the uniform load $q = 1500$ N/m on the 5 cm face. Solve for the deflection $y(x)$.

106. When the load on the beam described in Problem 105 is applied on the 10 cm face, the deflection will be large. In that case, the governing differential equation is

$$\frac{EI(d^2y/dx^2)}{\left(1 + (dy/dx)^2\right)^{3/2}} = -\frac{qLx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

For the properties specified in Problem 105, determine $y(x)$.

75. A Foucault pendulum is one free to swing in both the x- and y-directions. It is frequently displayed in science museums to exhibit the rotation of the earth, which causes the pendulum to swing in directions that continuously vary. The equations of motion are

$$\ddot{x} - 2\omega \sin \psi \dot{y} + k^2 x = 0,$$
$$\ddot{y} + 2\omega \sin \psi \dot{x} + k^2 y = 0,$$

when damping is absent (or compensated for). In these equations the dots over the variable represent differentiation with respect to time. Here ω is the angular velocity of the earth's rotation (7.29×10^{-5} sec^{-1}), ψ is the latitude, $k^2 = g/\ell$ where ℓ is the length of the pendulum. How long will it take a 10-m-long pendulum to rotate its plane of swing by 45° at the latitude where you live? How long if located in Quebec, Canada?

38. The motion of the compound spring system as sketched in Fig. 6.11 is given by the solution of the pair of simultaneous equations

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2),$$
$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2(y_1 - y_2),$$

where y_1 and y_2 are the displacements of the two masses from their equilibrium positions. The initial conditions are

$$y_1(0) = A, \quad y_1'(0) = B, \quad y_2(0) = C, \quad y_2'(0) = D.$$

Express as a set of first-order equations.

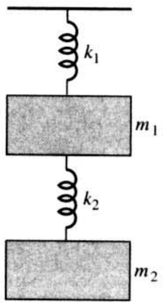


Figure 6.11

ΑΣΚΗΣΗ 14.6 Αλεπούδες και λαγοί

Ένα πολύ γνωστό οικοσύστημα διατυπώθηκε από τον Vito Volterra (Ιταλός, 1860–1940, δείτε, για παράδειγμα, τους Kahaner, Moler και Nash 1989 ή τους Giordano και Weir 1991). Αυτό αποτελείται από δύο πληθυσμούς, για παράδειγμα αλεπούδων και λαγών, που σχετίζονται με τις εξισώσεις:

$$\frac{dr}{dt} = 2r - \alpha r f$$
$$\frac{df}{dt} = -f + \alpha r f$$

όπου r είναι ο αριθμός των λαγών και f ο πληθυσμός των αλεπούδων και ο χρόνος t δίνεται σε έτη. Χρησιμοποιήστε τη χρονορουτίνα ode23 και υπολογίστε και σχεδιάστε τη λύση του διαφορικού συστήματος, για $\alpha = 0.01$ και αρχικές συνθήκες $r_0 = 300$ και $f_0 = 150$ για το χρονικό διάστημα [0, 25].