

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

1

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Στις εξισώσεις συνέχειας και ορμής :

(υπόθεση Stokes $\lambda = -2/3\mu$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

εισάγονται οι εξής νέες μεταβλητές

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad u'_i = \frac{u_i}{u_0}, \quad x'_i = \frac{x_i}{x_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \quad p' = \frac{p}{p_0}$$

όπου ο δείκτης “0” αναφέρεται
σε θέση του πεδίου. Έτσι οι
εξισώσεις γράφονται:

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_i}(\rho' u'_i) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_0}{u_0 t_0} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} &= \left(\frac{g x_0}{u_0^2} \right) \frac{F_i}{g} - \left(\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \right) \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \\ &+ \left(\frac{\mu}{x_0 u_0 \rho_0} \right) \frac{1}{\rho'} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_i \partial x'_j} + \left(\frac{(\lambda + \mu)}{\rho_0 u_0} \frac{1}{x_0} \right) \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x'_j} \right) \end{aligned}$$

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

2

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Δυναμική ομοιότητα
εάν οι ποσότητες στις
παρενθέσεις είναι
ίδιες

$$\text{Str} = \frac{(x_0 / t_0)}{u_0}$$

αριθμός Strouhal

$$\text{Fr} = \frac{u_0}{\sqrt{gx_0}}$$

αριθμός Froude

$$\text{M} = \frac{u_0}{\sqrt{p_0 / \rho_0}}$$

αριθμός Mach

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 x_0}{\lambda + \mu}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 x_0}{\mu}$$

αριθμός Reynolds

Συνολικές προϋποθέσεις δυναμικής ομοιότητας

- Ίδιες οριακές συνθήκες
- Όμοια γεωμετρία των πεδίων ροής
- Όλοι οι παραπάνω αριθμοί, ίσοι ένας προς ένα

Για πεδίο ροής χρονικά σταθερό, χωρίς βαρυτικές
δυνάμεις, με ταχύτητες $\text{Mach} < 0.3$ (ασυμπίεστο) ο μόνος
σημαντικός όρος στην εξίσωση ορμής είναι:

$$\left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{1}{\rho'} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_i \partial x'_j}$$





και η εξίσωση ορμής γίνεται

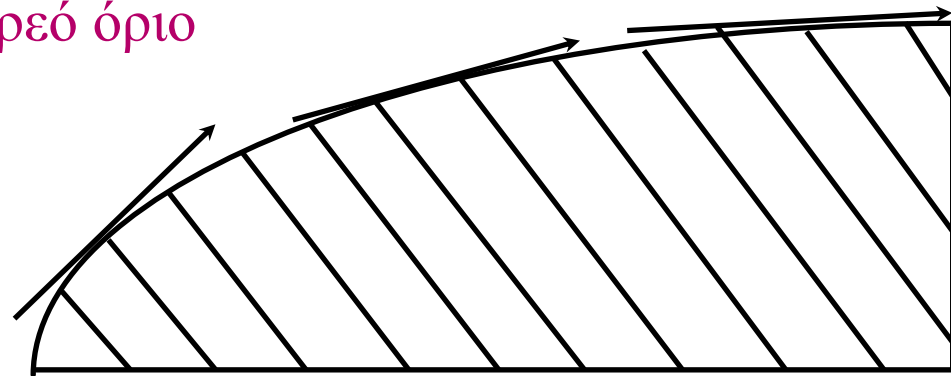
$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_i \partial x'_j}$$

για πολύ μεγάλους αριθμούς Reynolds είναι η εξίσωση ορμής του ιδεατού ρευστού (εξίσωση Euler)

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'_i}$$

Η εξίσωση Euler είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως και γι' αυτό στα στερεά όρια μπορεί να ικανοποιηθεί μία από τις δύο οριακές συνθήκες :

- Συνθήκη μη εισχώρησης στο στερεό όριο
- Συνθήκη μη ολίσθησης



ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ REYNOLDS

4

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Κύρια χαρακτηριστικά ροών οριακού στρώματος:

- Ύπαρξη κύριας κατεύθυνσης ροής
- Μεγάλες κλίσεις ταχυτήτων σε λεπτό στρώμα ρευστού

δηλαδή για διδιάστατο πεδίο

$$u_1 \gg u_2 \quad (u \gg v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$$

εξισώσεις συνέχειας και ορμής

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$



ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ REYNOLDS

5

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Επειδή είναι $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$

$$u' = u/u_0 \quad v' = (v/u_0) Re^n$$

$$x' = x/x_0 \quad y' = (y/x_0) Re^m$$

η εξίσωση της **συνέχειας** τότε γίνεται:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + Re^{-n+m} \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

Εάν $Re \rightarrow \infty \quad m > n \Rightarrow \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \Rightarrow v' = 0$ παντού

$m < n \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \Rightarrow u' = \text{σταθ.}$ παντού

$$m = n \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

η τελευταία σχέση είναι αυτή που ανταποκρίνεται στη φυσική πραγματικότητα

ΜΟΝΤΕΛΟ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ REYNOLDS

6

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



η εξίσωση της **u-ορμής** γίνεται

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial x'} + \text{Re}^{2n-1} \frac{\partial^2 u'}{\partial y' \partial y'}$$

Εάν $\text{Re} \rightarrow \infty$ $n > 1/2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = 0$

$$n < 1/2 \Rightarrow u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial p}{\partial x'}$$

$$n = 1/2 \Rightarrow u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{u_0^2} \frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

η τελευταία σχέση επιβεβαιώνεται
από το πείραμα

ομοίως για τη **v-ορμή** προκύπτει $\frac{\partial p}{\partial y'} = 0$

Τελικά είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

7

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{Dp}{Dt} + \dot{Q} + \lambda (e_{ss})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij}$$

Για διδιάστατη ροή γίνεται

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \dot{Q} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{\rho}{\rho_0}, \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad v' = \frac{v}{u_0}, \quad x' = \frac{x}{x_0}, \quad y' = \frac{y}{x_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0}, \\ p' &= \frac{p}{p_0}, \quad T' = \frac{T}{\Delta T}, \quad k' = \frac{k}{k_0}, \quad C_p' = \frac{C_p}{C_{p_0}}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda_0} \end{aligned}$$

$$\text{προκύπτει } \rho' C_p' \left(\left(\frac{x_0 / t_0}{u_0} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) =$$



ΔΙΑΣΤΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

8

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



$$\begin{aligned} & \rho' C_p' \left(\left(\frac{x_0 / t_0}{u_0} \right) \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = \\ & = \frac{k_0}{\rho_0 x_0 u_0 C_{p_0}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) \right\} + \\ & + \frac{p_0}{\rho_0 C_{p_0} \Delta T} \left(\frac{x_0 / t_0}{u_0} + \frac{\partial p'}{\partial t'} + u' \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \\ & + \dot{Q} \frac{x_0}{\rho_0 u_0 C_{p_0} \Delta T} + \lambda' \frac{u_0 \lambda_0}{\rho_0 x_0 C_{p_0} \Delta T} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \\ & 2 \mu' \frac{u_0 \mu_0}{\rho_0 x_0 C_{p_0} \Delta T} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτουν οι εξής
χαρακτηριστικοί αριθμοί

$$\frac{k_0}{\rho_0 x_0 u_0 C_{p_0}} = \frac{1}{Pr Re} = \frac{1}{Pe}$$

$$Pe = Pr Re$$

αριθμός Peclet

$$Ec = \frac{u_0^2}{C_{p_0} \Delta T}$$

αριθμός Eckert

$$Pr = \frac{\nu_0}{k_0 / \rho_0 C_{p_0}} = \frac{\nu_0}{a_0}$$

αριθμός Prandtl

ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

9

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Για μόνιμη διδιάστατη ροή
ασυμπίεστου ρευστού με
μηδενική παραγωγή ενέργειας,
η εξίσωση ενέργειας είναι

Τα κατάλληλα μεγέθη
αδιαστατοποίησης είναι

$$v = u_0 \operatorname{Re}^{-1/2} v', \quad y = x_0 \operatorname{Re}^{-1/2} y'$$

οπότε

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ &+ \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho' C_p' \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) &= \frac{1}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) + \\ &+ \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Pr} \operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) + \frac{\operatorname{Ec}}{M^2} \left(u' \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \\ &+ \frac{\operatorname{Ec}}{\operatorname{Re}} \lambda' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \\ &+ 2\mu' \frac{\operatorname{Ec}}{\operatorname{Re}} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΘΕΡΜΙΚΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ

10

Εργ. Αεροδυναμικής
Ε.Μ.Π.



Εάν $Re \rightarrow \infty$ η εξίσωση

$$\begin{aligned} \rho' C_p' \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) &= \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial x'} \right) + \\ &+ \frac{Re}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) + \frac{Ec}{M^2} \left(u' \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \\ &+ \frac{Ec}{Re} \lambda' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 + \\ &+ 2\mu' \frac{Ec}{Re} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} Re \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

γράφεται

$$\begin{aligned} \rho' C_p' \left(u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y'} \left(k' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) + \\ &+ \frac{Ec}{M^2} \left(u' \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \mu' Ec \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 \end{aligned}$$

και σε πραγματικές μεταβλητές επειδή $\partial p / \partial y = 0$

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$



- ▼ Αριθμός Reynolds Re
- ▼ Αριθμός Prandtl
- ▼ Αριθμός Strouhal
- ▼ Αριθμός Froude
- ▼ Αριθμός Eckert
- ▼ Αριθμός Mach
- ▼ Αριθμός Schmidt
- ▼ Αριθμός Lewis
- ▼ Αριθμός Nusselt
- ▼ Αριθμός Grashof
- ▼ Αριθμός Knudsen
- ▼ Αριθμός Biot
- ▼ Αριθμός Spalding
- ▼ Αριθμός Jacob