

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

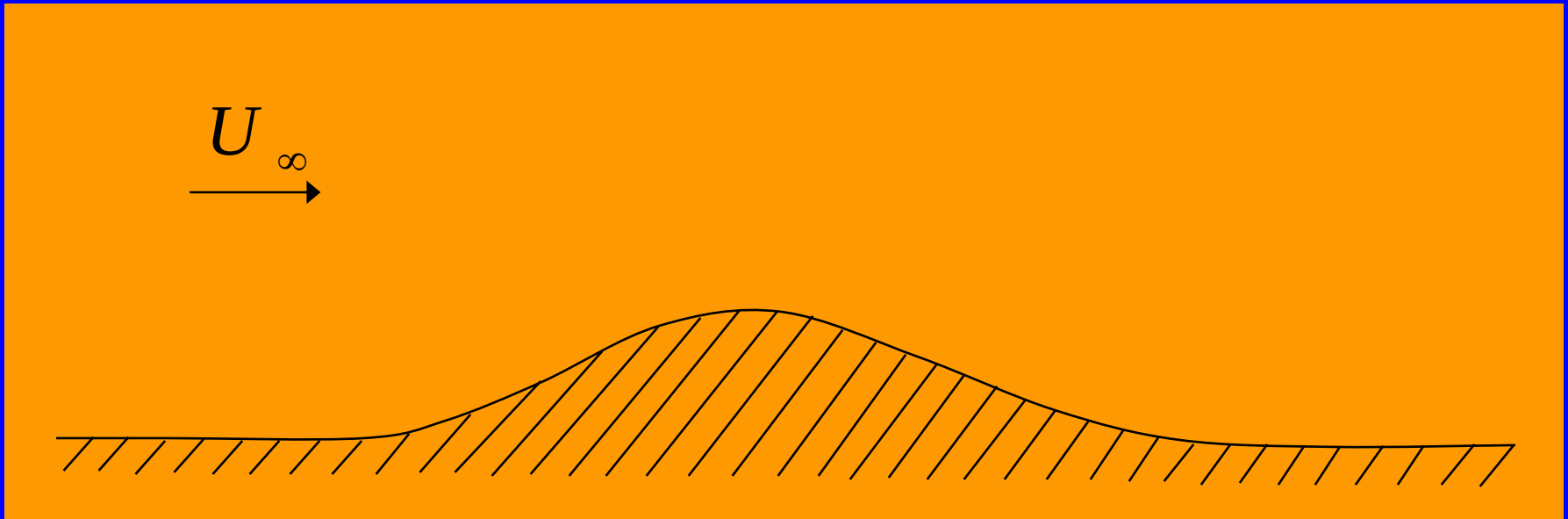
ΑΣΚΗΣΗ Ζ

ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ
ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΛΟΦΟ.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Κατασκευή διδιάστατου, καμπυλόγραμμου πλέγματος γύρω από διατομή λόφου για την επίλυση ροής με πεπερασμένες διαφορές.

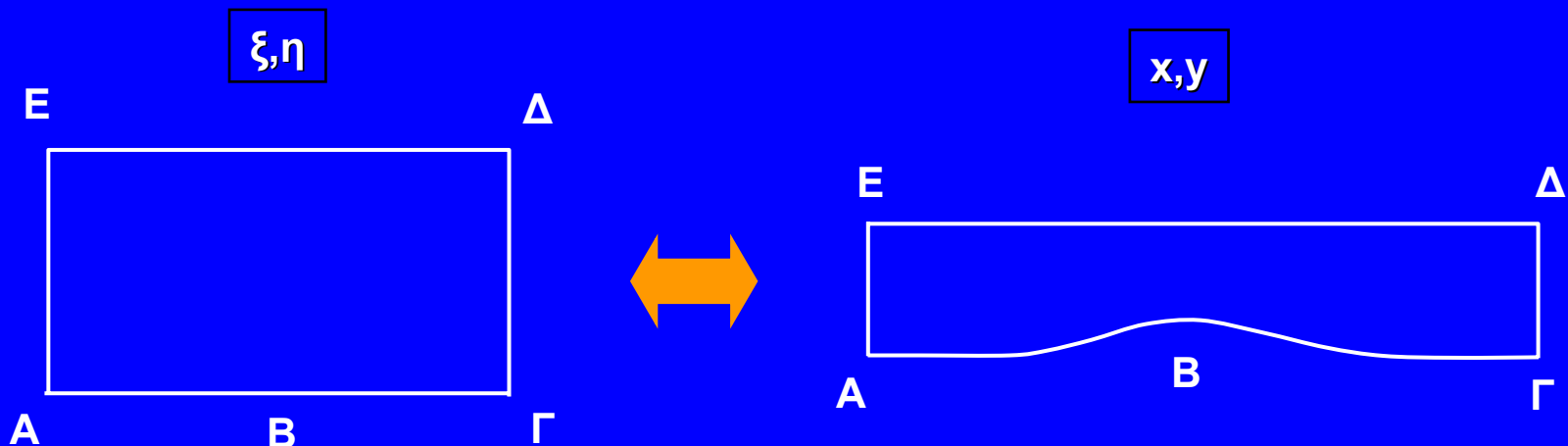


2α. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

Επίλυση 2D ελλειπτικών εξισώσεων για τις καμπύλες του πλέγματος με μικτές συνοριακές συνθήκες

Πεδιακές
εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0 \\ a \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} a &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned}$$



2β. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

Οριακές συνθήκες

$$\begin{array}{l} \text{Neumann:} \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \xi = 1 \end{array} \right\} \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \\ \text{ή/και} \\ \text{Dirichlet:} \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \xi = 1 \end{array} \right\} x = f(\xi, \eta) \\ \left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 \\ \eta = 0 \end{array} \right\} y = g(\xi, \eta) \end{array}$$

3α. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}^2} = \Phi_{\xi\xi|i,j}$$

$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \xi_{i,j}} = \Phi_{\xi|i,j}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}^2} = \Phi_{\eta\eta|i,j}$$

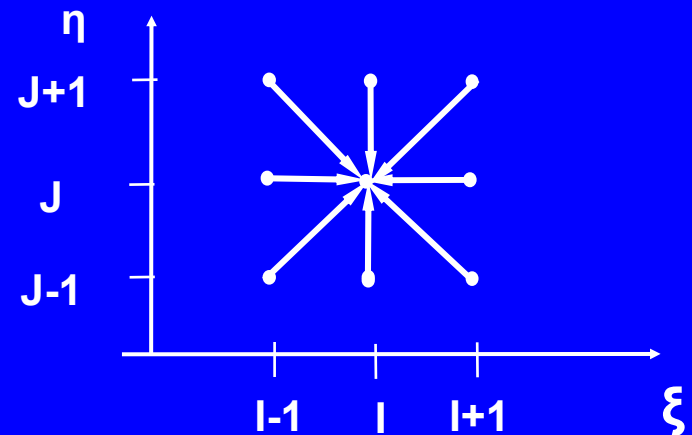
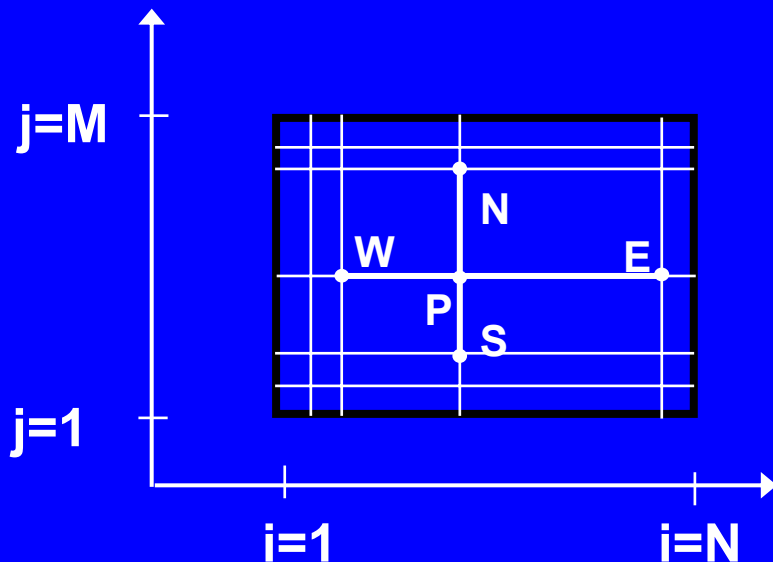
$$\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial \eta_{i,j}} = \Phi_{\eta|i,j}$$

$$\Delta \xi_{i+1/2,j} = \xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}$$

$$\Delta \xi_{i-1/2,j} = \xi_{i,j} - \xi_{i-1,j}$$

$$\Delta \eta_{i,j+1/2} = \eta_{j+1/2} - \eta_{i,j}$$

$$\Delta \eta_{i,j-1/2} = \eta_{i,j} - \eta_{i,j-1/2}$$



3β. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\xi\xi|i,j} &= \frac{\Phi_{\xi|i+1/2,j} - \Phi_{\xi|i-1/2,j}}{\frac{1}{2}(\Delta\xi_{i+1/2,j} + \Delta\xi_{i-1/2,j})} \left\{ \begin{aligned} \Phi_{\xi|i+1/2,j} &= \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta\xi_{i+1/2,j}} \\ \Phi_{\xi|i-1/2,j} &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta\xi_{i-1/2,j}} \end{aligned} \right. \\
 \Phi_{\eta\eta|i,j} &= \frac{\Phi_{\eta|i+1/2,j} - \Phi_{\eta|i-1/2,j}}{\frac{1}{2}(\Delta\eta_{i,j+1/2} + \Delta\eta_{i,j-1/2})} \left\{ \begin{aligned} \Phi_{\eta|i,j+1/2} &= \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta\eta_{i,j+1/2}} \\ \Phi_{\eta|i,j-1/2} &= \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta\eta_{i,j-1/2}} \end{aligned} \right. \\
 \Phi_{\xi\eta|i,j} &= \frac{\Phi_{\xi|i,j+1/2} - \Phi_{\xi|i,j-1/2}}{\frac{1}{2}(\Delta\eta_{i,j+1/2} + \Delta\eta_{i,j-1/2})} \left\{ \begin{aligned} \Phi_{\xi|i,j+1/2} &= \frac{1/4((\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i+1,j}) - (\Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j}))}{1/2((\Delta\xi_{i+1/2,j+1/2} + \Delta\xi_{i-1/2,j+1/2}))} \\ \Phi_{\xi|i,j-1/2} &= \frac{1/4((\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i+1,j-1}) - (\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-1,j-1}))}{1/2((\Delta\xi_{i+1/2,j-1/2} + \Delta\xi_{i-1/2,j-1/2}))} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

3γ. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

Επίλυση με ADI - Τριδιαγώνιο σύστημα

$$A_{ij}\Phi_{\xi\xi|i,j} - 2B_{ij}\Phi_{\xi\eta|i,j} + C_{ij}\Phi_{\eta\eta|i,j} = 0$$

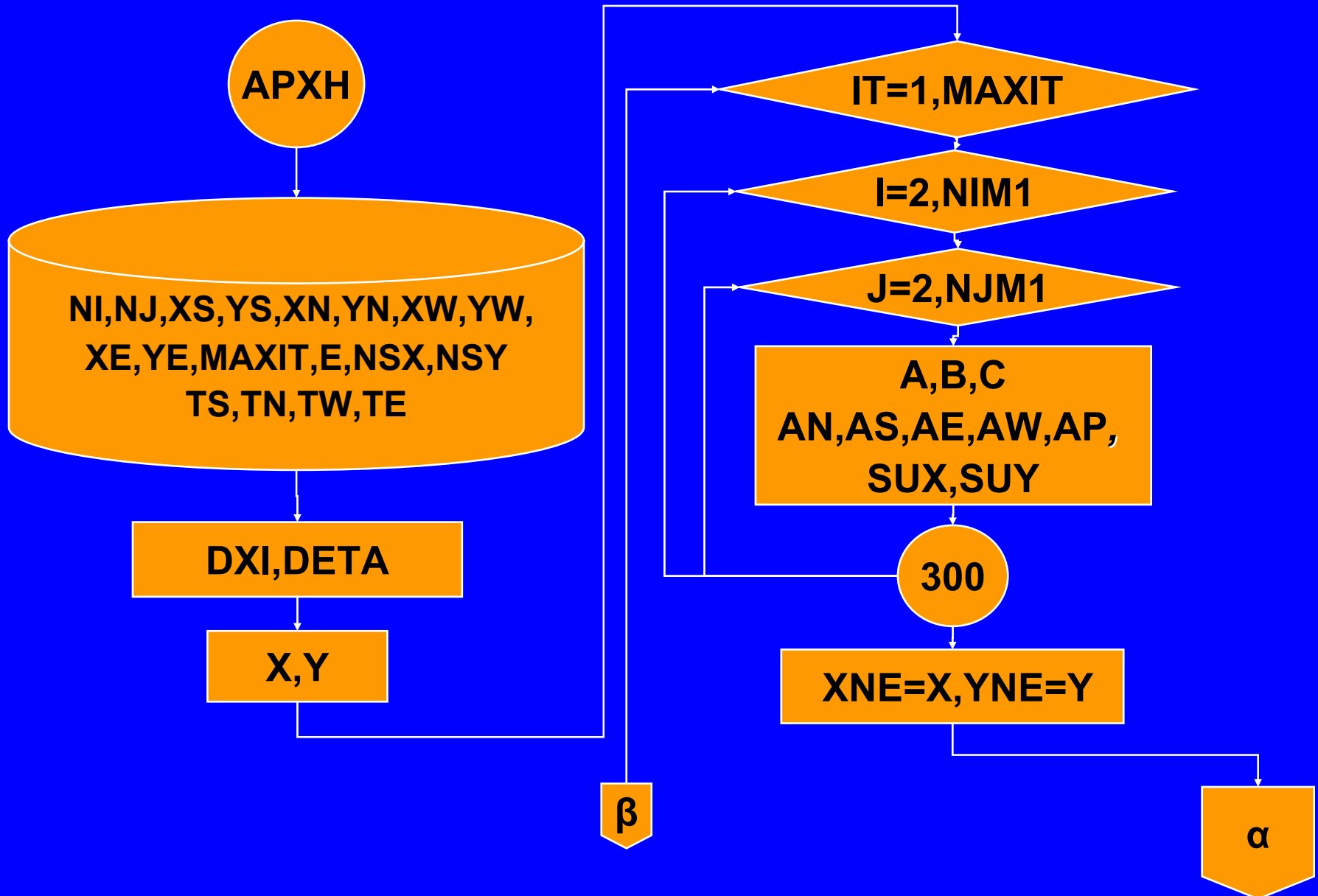
$$A_{ij} = x_{\eta|i,j}^2 + y_{\eta|i,j}^2 = \frac{[(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2]}{(\Delta\eta_{i,j+1/2} + \Delta\eta_{i,j-1/2})^2}$$

$$B_{ij} = x_{\xi|i,j}x_{\eta|i,j} + y_{\xi|i,j}y_{\eta|i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})}{(\Delta\xi_{i+1/2,j} + \Delta\xi_{i-1/2,j})(\Delta\eta_{i,j+1/2} + \Delta\eta_{i,j-1/2})}$$

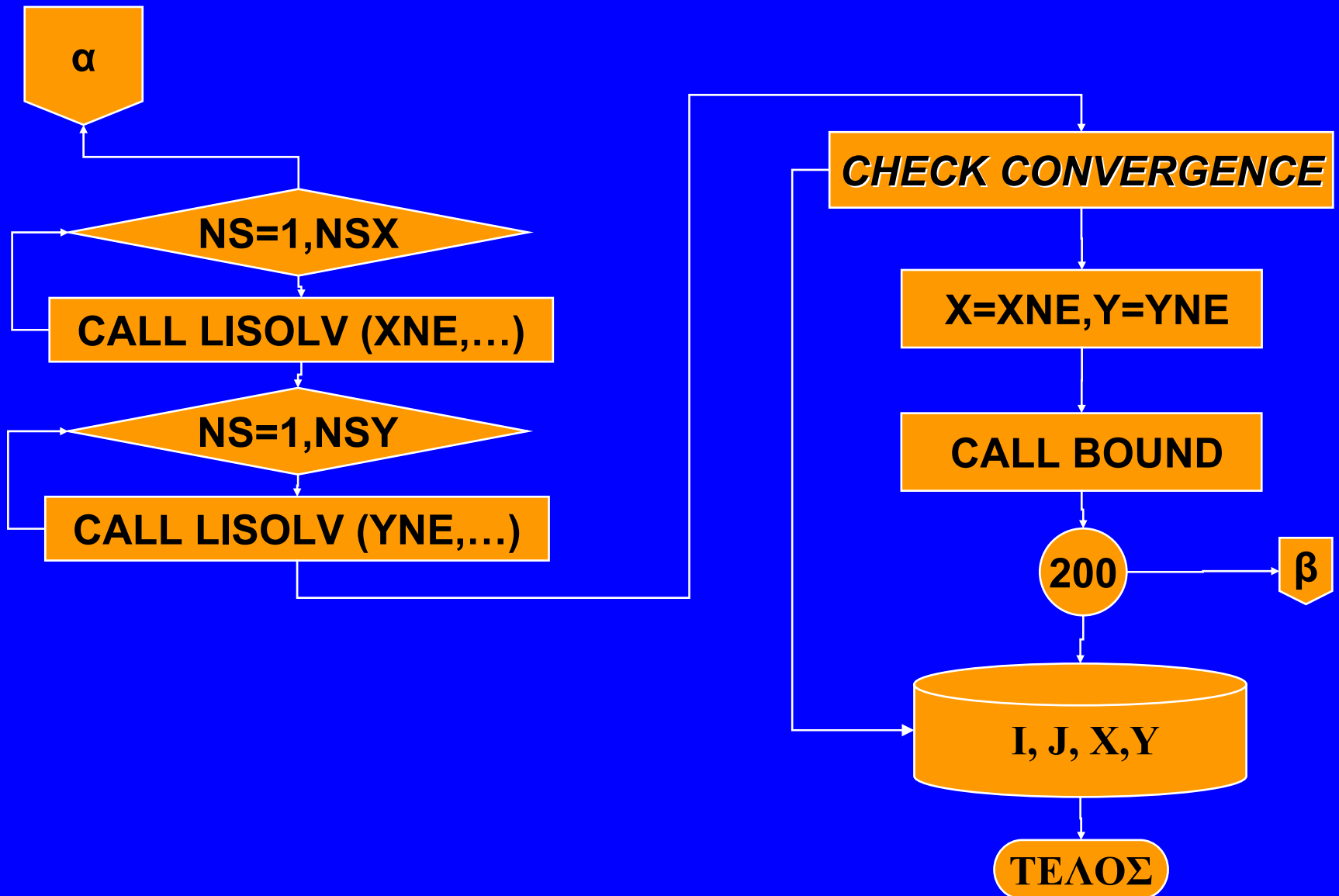
$$C_{ij} = x_{\xi|i,j}^2 + y_{\xi|i,j}^2 = \frac{[(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2]}{(\Delta\xi_{i+1/2,j} + \Delta\xi_{i-1/2,j})^2}$$

$$A_P\Phi_P = A_N\Phi_N + A_W\Phi_W + A_S\Phi_S + A_E\Phi_E + SU_\Phi$$

4α. ΛΟΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

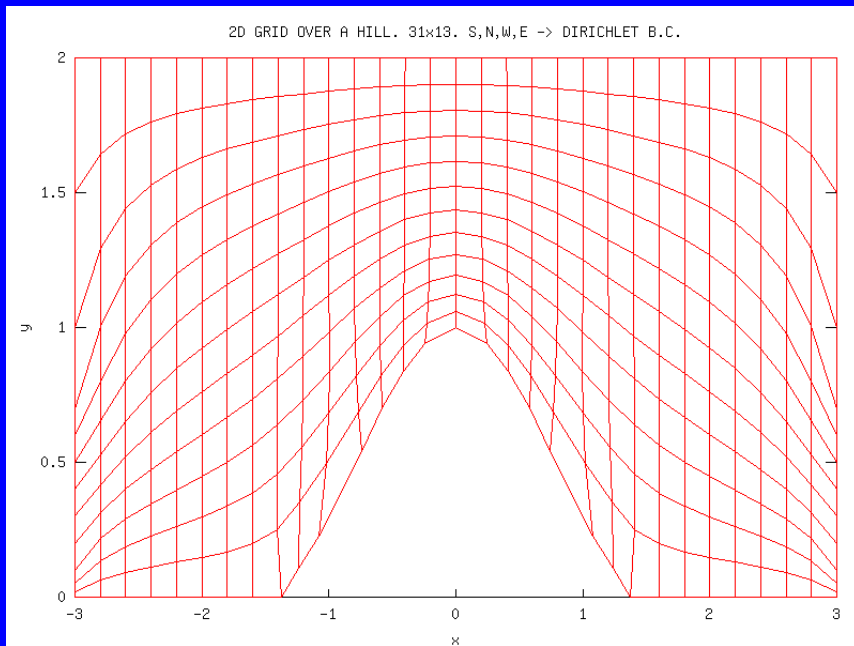


4β. ΛΟΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

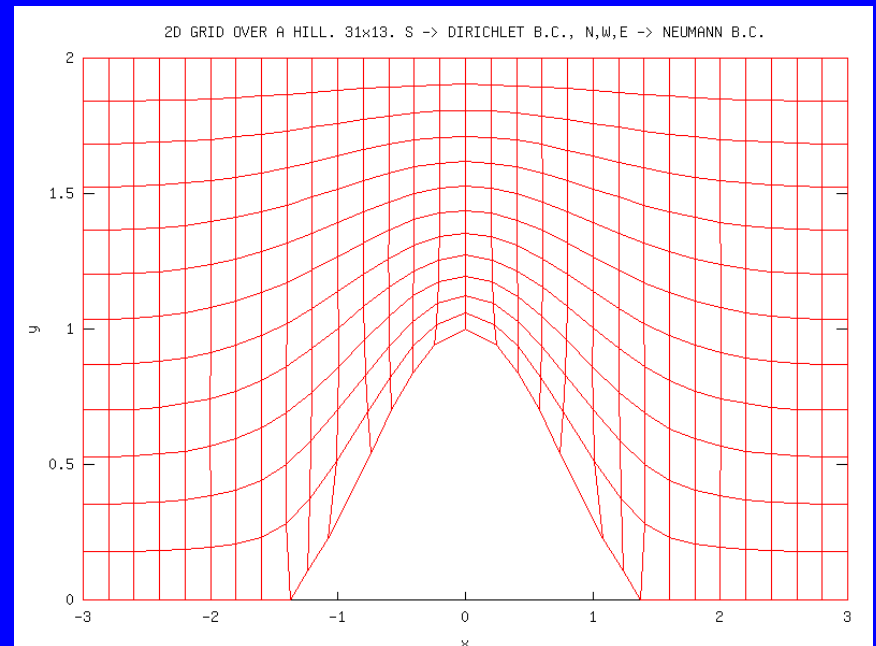


5α. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

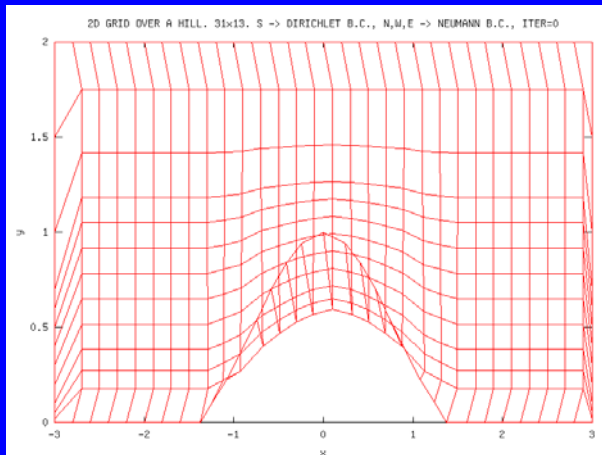
S,N,E,W Dirichlet



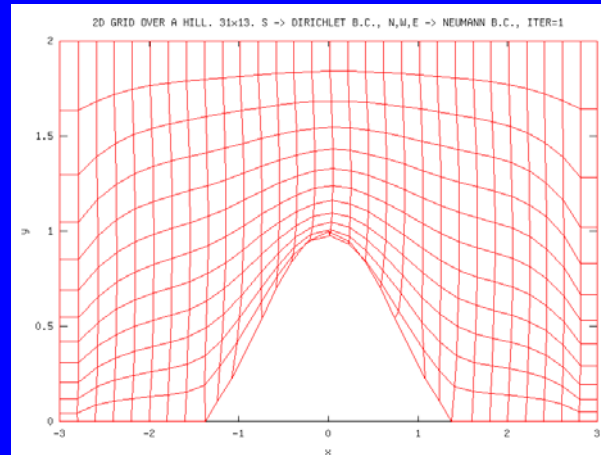
**S Neumann
N,E,W Dirichlet**



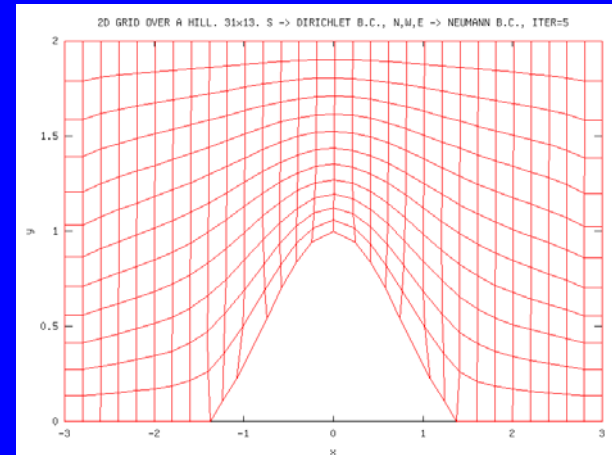
5β. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ- ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ



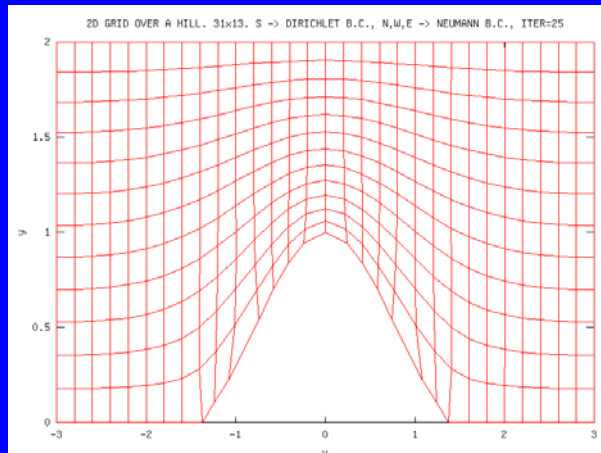
iter=0



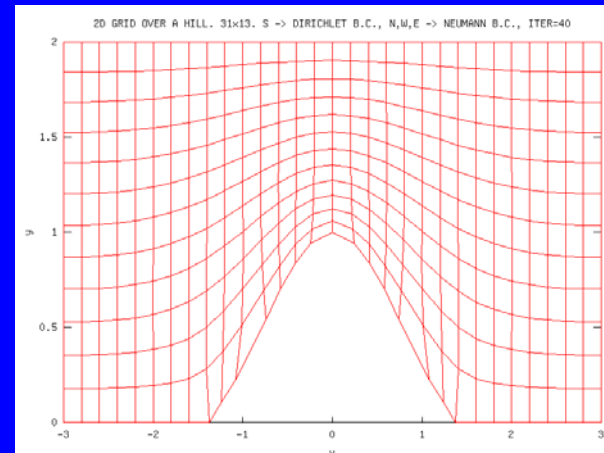
iter=1



iter=5

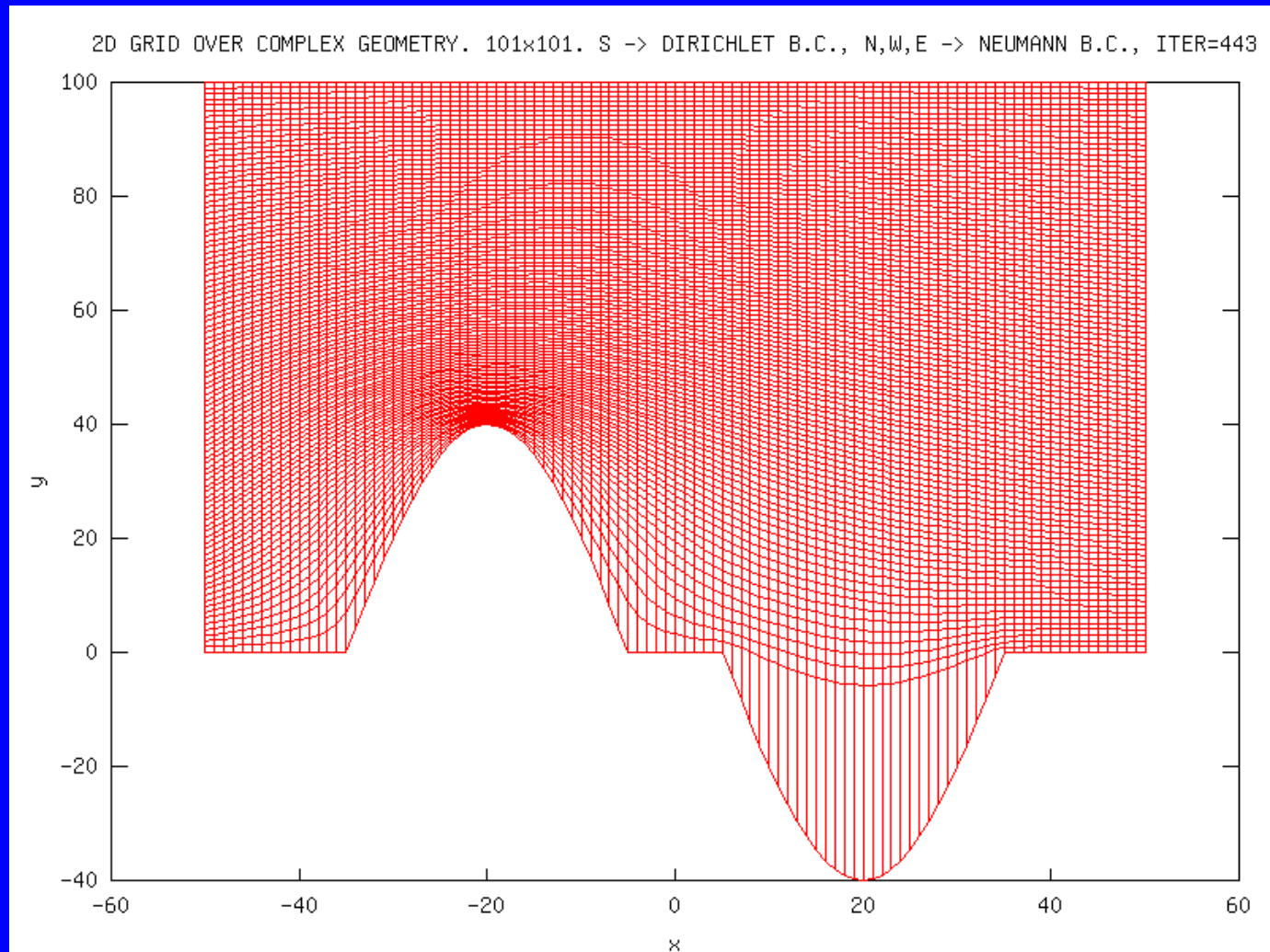


iter=25



iter=40

5γ. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



6. ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Η ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΓΙΑ NEUMANN ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΠΙΤΥΓΧΑΝΕΤΑΙ ΤΑΧΥΤΕΡΑ
- Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΚΑΙ ΣΕ ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ
- Η ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΡΗΤΗΣ ΕΠΙΒΟΛΗΣ ΠΥΚΝΩΣΗΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΤΟΥ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ