

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΗ Δ

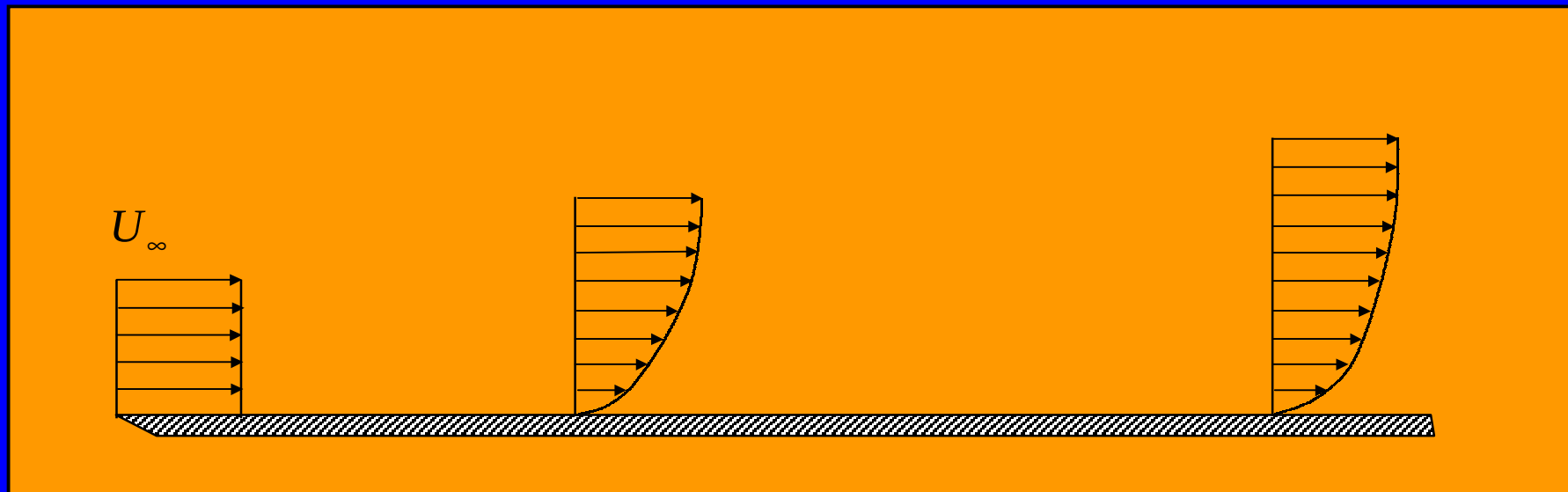
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΕΔΙΟΥ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΣΤΡΩΤΗΣ ΡΟΗΣ,
ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΛΑΚΑ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ RUNGE-KUTTA.

1α. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

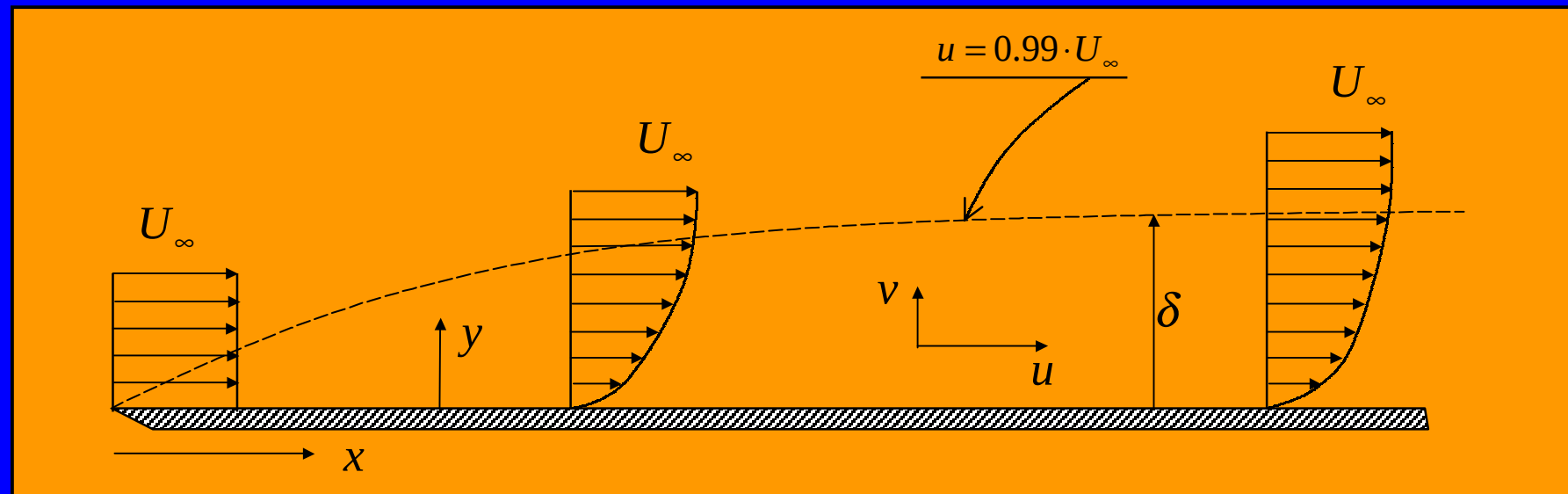
Υπολογισμός πεδίου ταχυτήτων πάνω από
επίπεδη πλάκα σε παράλληλη ροή.

Συνθήκες: Διδιάστατη, Στρωτή, Ισοθερμοκρασιακή, μόνιμη ροή
Ασυμπίεστο, Νευτώνιο ρευστό



1β. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Υπολογισμός στρωτού οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα σε παράλληλη ροή για ασυμπίεστο, νευτώνιο ρευστό.



2α. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΡΩΤΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ - PRANDTL

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

εξίσωση u ορμής

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

εξίσωση συνέχειας

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\text{για } y = 0 : u = 0, \quad v = 0$$

$$\text{για } y = \infty : u = U_{\infty}, \quad v = 0$$

2β. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

ΛΥΣΗ BLASIUS

Ανεξάρτητη μεταβλητή: $\eta = y \cdot \frac{\sqrt{U_\infty}}{\nu \cdot x}$

Εξαρτημένη μεταβλητή: $\Psi = \sqrt{\nu \cdot x \cdot U_\infty} \cdot f(\eta)$
(ροϊκή συνάρτηση)

Ορισμός ροϊκής συνάρτησης: $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

2γ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

ΛΥΣΗ BLASIUS

δ.ε. προς επίλυση:

$$f \cdot f'' + 2 \cdot f''' = 0$$

οριακές συνθήκες:

$$\text{για } \eta = 0 : f = 0, \quad f' = 0$$

$$\text{για } \eta = \infty : f' = 1$$

αδιαστατοποιημένες
ταχύτητες:

$$U = \frac{u}{U_{\infty}} = f'$$

$$V = \frac{v}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot U_{\infty}}{x}}} = \eta \cdot f' - f$$

2δ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ

Μετασχηματισμός δ.ε. 3ης ΤΑΞΗΣ
σε ισοδύναμο σύστημα δ.ε. 1ης ΤΑΞΗΣ

μεταβλητές
αντικατάστασης:

$$g_1 = f \quad , \quad g_2 = f' \quad , \quad g_3 = f''$$

ισοδύναμο σύστημα δ.ε.:

$$\frac{dg_1}{d\eta} = g_2$$

$$\frac{dg_2}{d\eta} = g_3$$

$$\frac{dg_3}{d\eta} = -\frac{1}{2} g_1 g_3$$

Οριακές συνθήκες: για $\eta = 0$: $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = ?$

για $\eta = \infty$: $g_2 = 1$

3. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ROUNGE - KUTTA 4ης
ΤΑΞΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ δ.ε.

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \right] \cdot h$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

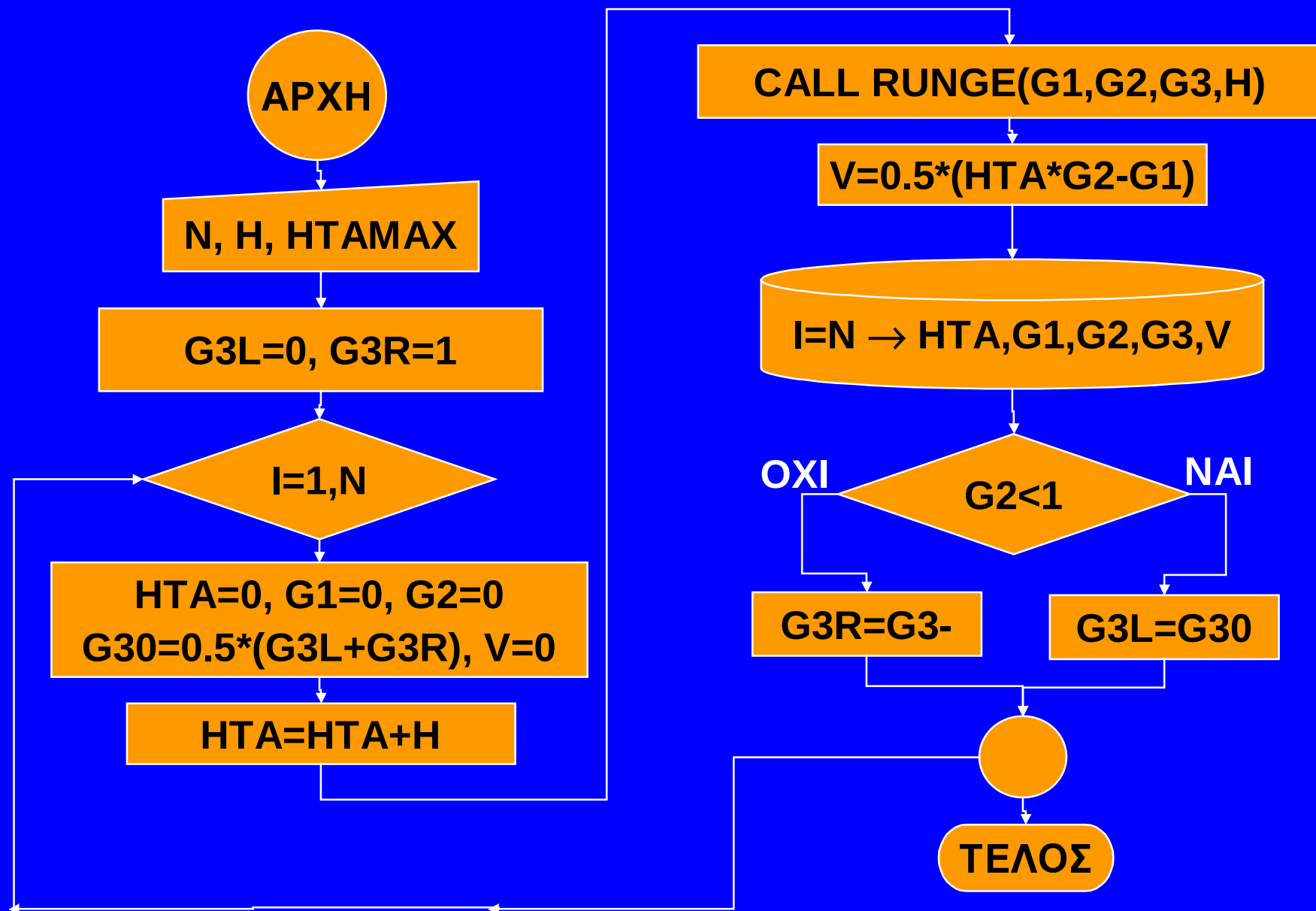
$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, y_i + \frac{1}{2} \cdot h \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3)$$

4. ΛΟΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ



5α. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORTRAN

```
PROGRAM BLAUSIUS
C---ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΥΤΟ ΕΠΙΛΥΕΙ ΤΗΝ ΕΙΣΩΣΗ BLASIUS
C---F*F''+2*F''=0 ΓΙΑ ΣΤΡΩΤΟ ΟΡΙΑΚΟ ΣΤΡΩΜΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΩΝΤΑΣ
C---ΤΗΝ ΜΕΘΟΔΟ RUNGE-KUTTA ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΤΑΞΗΣ.
C---ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ G1=F, G2=F' ΚΑΙ G3=F''.
      OPEN(2,FILE='BL.OUT')
      OPEN(3,FILE='U.DAT')
      OPEN(4,FILE='V.DAT')
      OPEN(7,FILE='T.DAT')
C---N      = ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ Υ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
      WRITE(*,*) "N="
      READ (*,*)  N
C---H      = ΒΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ
      WRITE(*,*) "H="
      READ (*,*)  H
C---HTAMAX = ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ Η
      WRITE(*,*) "HTAMAX="
      READ (*,*)  HTAMAX
C
      G3L=0.
      G3R=1.
C
      WRITE(2,101)
C
```

5β. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORTRAN

```
DO 100 I=1,N
HTA=0.
G1=0.
G2=0.
C---G30  = TIMH THΣ GE GIA  HTA=0
C---TO G30 ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ G3L ΚΑΙ G3R
G30=0.5*(G3L+G3R)
G3=G30
V=0.
10 IF (I.EQ.N) THEN
    WRITE(2,102) HTA,G1,G2,G3,V
    WRITE(3,103) G2,HTA
    WRITE(4,103) V,HTA
    WRITE(7,103) G3,HTA
ENDIF
HTA=HTA+H
CALL RUNGE(G1,G2,G3,H)
V=0.5*(HTA*G2-G1)
IF(HTA.LE.HTAMAX) GOTO 10
C---ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ G3L ΚΑΙ G3R
IF(G2.LT.1.) THEN
    G3L=G30
ELSE
    G3R=G30
ENDIF
100 CONTINUE
```

5γ. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORTRAN

```
CLOSE(2)
CLOSE(3)
CLOSE(4)
CLOSE(7)
101  FORMAT(1H , '    HTA    F=G1    F,=G2    F,,=G3 ' )
102  FORMAT(5(5X,E10.4))
103  FORMAT(1H ,2F10.6)
END
```

5δ. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORTRAN

```
C
C-- Η ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ RUNGE ΕΠΙΛΥΕΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
C
      SUBROUTINE RUNGE(G1,G2,G3,H)
      DIMENSION DG1DH(4),DG2DH(4),DG3DH(4)
C
      GAB(X,Y)=-0.5*X*Y
      DG1DH(1)=G2
      DG2DH(1)=G3
      DG3DH(1)=GAB(G1,G3)
C----ΜΕΘΟΔΟΣ EULER
      G3P=G3+0.5*H*DG3DH(1)
      G2P=G2+0.5*H*DG2DH(1)
      G1P=G1+0.5*H*DG1DH(1)
C--ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Κ2 ΣΤΗΝ RUNGE-KUTTA
      DG1DH(2)=G2P
      DG2DH(2)=G3P
      DG3DH(2)=GAB(G1P,G3P)
```

5ε. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FORTRAN

C--ΜΕΘΟΔΟΣ EULER

G3PP=G3+0.5*H*DG3DH(2)

G2PP=G2+0.5*H*DG2DH(2)

G1PP=G1+0.5*H*DG1DH(2)

C--ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Κ3 ΣΤΗΝ RUNGE-KUTTA

DG1DH(3)=G2PP

DG2DH(3)=G3PP

DG3DH(3)=GAB(G1PP,G3PP)

C--ΜΕΘΟΔΟΣ EULER

G3PPP=G3+H*DG3DH(3)

G2PPP=G2+H*DG2DH(3)

G1PPP=G1+H*DG1DH(3)

C--ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ Κ4 ΣΤΗΝ RUNGE-KUTTA

DG1DH(4)=G2PPP

DG2DH(4)=G3PPP

DG3DH(4)=GAB(G1PPP,G3PPP)

C--ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

G2=G2+H/6.*(DG2DH(1)+2.*DG2DH(2)+2.*DG2DH(3)+DG2DH(4))

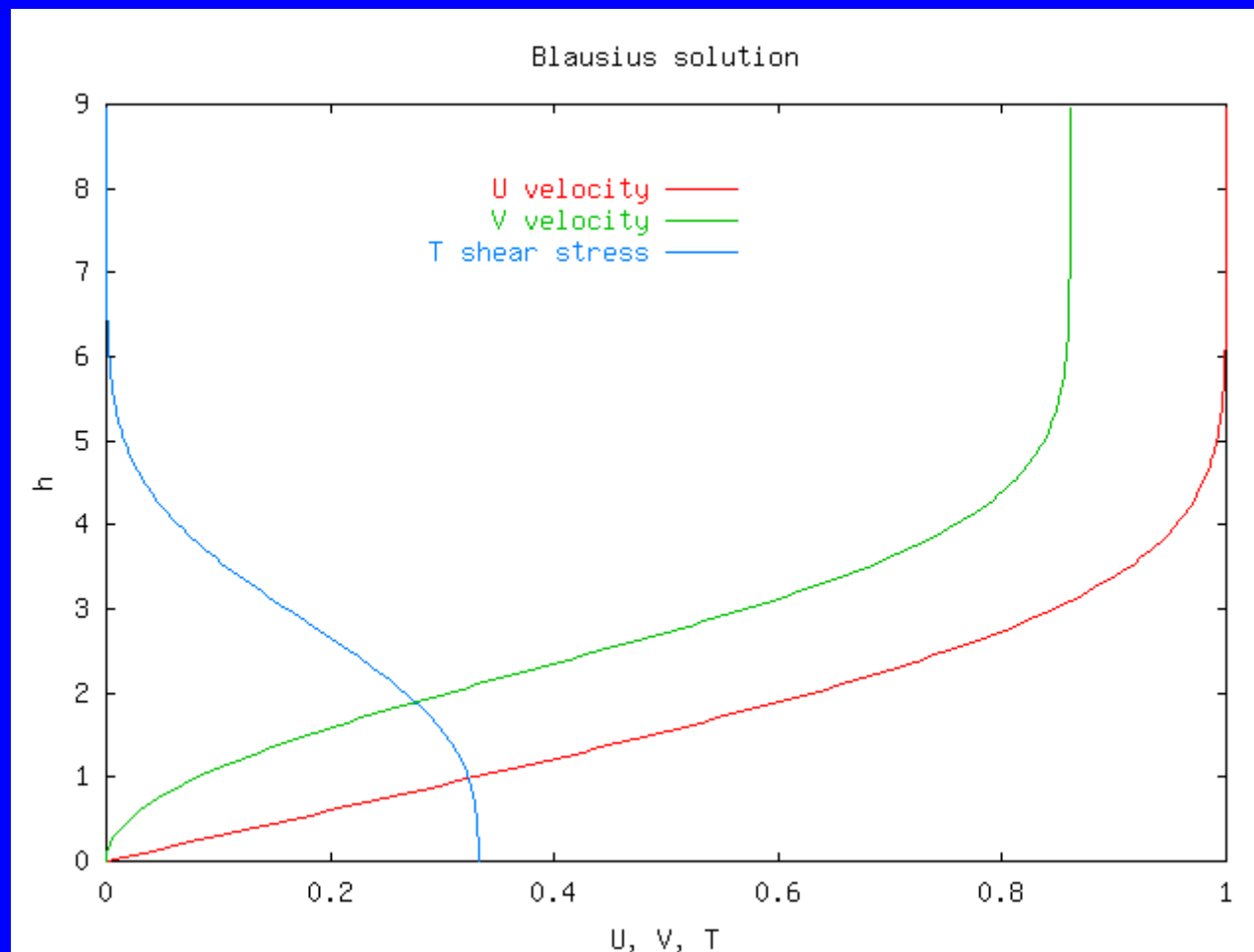
G1=G1+H/6.*(DG1DH(1)+2.*DG1DH(2)+2.*DG1DH(3)+DG1DH(4))

G3=G3+H/6.*(DG3DH(1)+2.*DG3DH(2)+2.*DG3DH(3)+DG3DH(4))

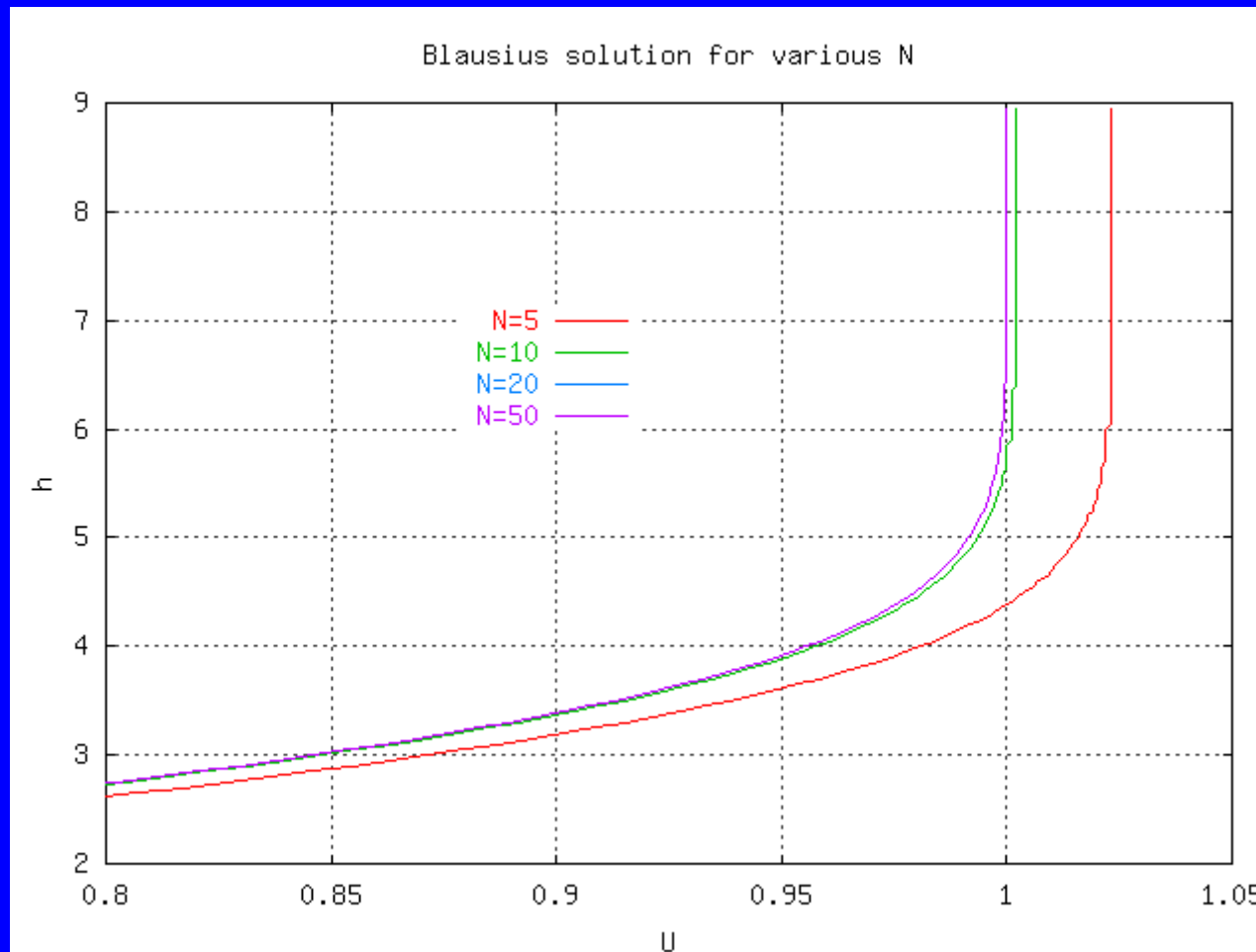
RETURN

END

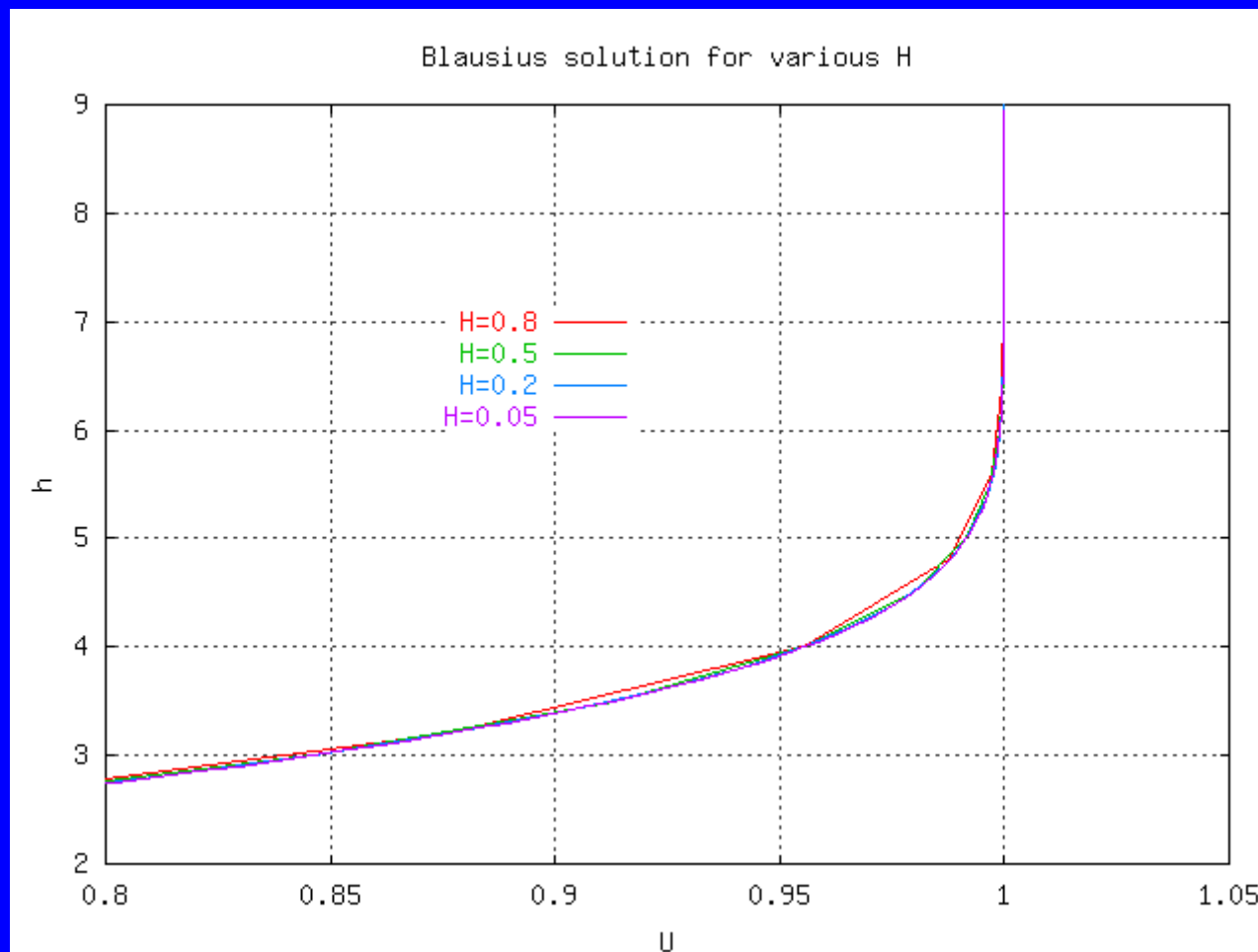
6α. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



6β. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΗΣ ΑΠΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ



6γ. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΛΥΣΗΣ ΑΠΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ



7. ΚΡΙΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- ΑΜΕΣΗ ΕΦΑΡΜΟΣΙΜΟΤΗΤΑ RUNGE - KUTTA
- ΑΝΑΙΣΘΗΣΙΑ ΣΕ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΑΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ