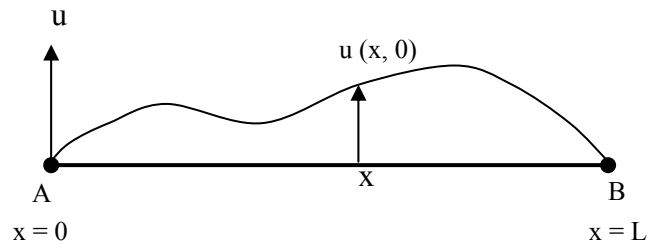


Ταλάντωση Ελαστικής Χορδής

1. Λεκτική περιγραφή προβλήματος

Ελαστική χορδή είναι τεντωμένη μεταξύ των σημείων A και B. Με εξωτερική επίδραση, η χορδή αποκτά αρχική παραμόρφωση και μετά αφήνεται ελεύθερη. Λόγω δυνάμεων ελαστικότητας η χορδή υφίσταται ταλάντωση. Ζητείται να υπολογισθεί η μετατόπιση των σημείων της χορδής ε το χρόνο, $u(x, t)$, όπου u



η μετατόπιση της χορδής στο σημείο x και τη χρονική στιγμή t .

2. Μαθηματικοποίηση του προβλήματος

Η χορδή θεωρείται ελαστική που σημαίνει ότι δεν μπορούν να αναπτυχθούν ροπές κάμψης κατά το μήκος της, κατά συνέπεια οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά μήκος της χορδής είναι εφελκυστικές. Έστω ρ_0 η πυκνότητα του υλικού της χορδής ανά μονάδα μήκους της χορδής, τότε οι νόμοι διατήρησης γράφονται:

2.1 Νόμος διατήρησης μάζας

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(x, t) ds = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 dx$$

Σε κάθε μήκος Δx , αντιστοιχεί μια πυκνότητα υλικού $\rho(x, t)$ και μήκος χορδής ds . Συνεπώς η διατήρησης μάζας γράφεται:

Για Δx τείνον στο μηδέν, προκύπτει ότι η πυκνότητα υλικού της χορδής εξαρτάται από την διαμόρφωση της χορδής σύμφωνα με τη σχέση:

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(x, t) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cdot dx = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 dx$$

όπου το μήκος ds της χορδής ισούται με $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cdot dx$

$$\rho(x,t) (1+u_x^2)^{1/2} = \rho_0$$

2.2 Ισορροπία δυνάμεων στην κατεύθυνση x

Η ισορροπία των δυνάμεων εφελκυσμού στην κατεύθυνση x δίνουν την ακόλουθη σχέση

$$T(x,t)\cos a(x,t) - T(x+\Delta x,t)\cos a(x+\Delta x,t) = 0$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\cos a(x,t)] = 0$$

Η εξίσωση αυτή δίνει το συμπέρασμα ότι σε κάθε θέση x της χορδής ισχύει

$$T \cos a = \tau(t)$$

όπου $\tau(t)$ σταθερή ποσότητα ίση με την τάνυση της χορδής στα άκρα της (που μπορεί να είναι μεταβλητή στο χρόνο).

2.3 Ισορροπία δυνάμεων στην κατεύθυνση u.

Στην κατεύθυνση u γίνεται η ταλάντωση της χορδής που για γενικότητα τη θεωρούμε ότι βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο. Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα για στοιχείο ds της χορδής προκύπτει:

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} \rho u_t ds = T(x+\Delta x,t)\sin a(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin a(x,t) - \int_x^{x+\Delta x} \rho g ds - \int_x^{x+\Delta x} \rho K u_t ds$$

όπου ο τελευταίος όρος εκφράζει γραμμικό όρο απόσβεσης

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt} dx = \tau [\tan a(x+\Delta x,t) - \tan a(x,t)] - \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 g dx$$

Για Δx τείνον στο μηδέν προκύπτει ότι:

$$\rho_0 u_{tt} = \tau \frac{d^2 u}{dx^2} - \rho_0 g - \rho_0 K u_t$$

ή

$$u_{tt} + K u_t = C^2 u_{xx} - g$$

$$\text{όπου } C^2 = \tau / \rho_0$$

Η μερική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης ως προς χρόνο και χώρο εκφράζει την ταλάντωση της χορδής.

2.4 Οριακές συνθήκες

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης απαιτούνται κατάλληλες οριακές συνθήκες που να οδηγούν σε μοναδική λύση το πρόβλημα.

Στη χρονική στιγμή $t = 0$, η χορδή έχει μια αρχική παραμόρφωση καθώς και μια αρχική ταχύτητα (απελευθέρωση).

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), & t &= 0 \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Κατόπιν για κάθε χρονική στιγμή ($t > 0$) τα άκρα της χορδής είναι στερεωμένα.

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u_t(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0, & u_t(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση ταλάντωσης της χορδής ονομάζεται εξίσωση κύματος, εκφράζει δε την εγκάρσια μετάδοση κύματος. Αντίστοιχη εξίσωση:

$$u_{tt} = C^2 u_{xx}$$

$$\text{όπου } C^2 = E / \rho$$

Ισχύει για διαμήκη μετάδοση κύματος μέσα σε ελαστικό μέσο, με υλικό που έχει πυκνότητα ρ και μέτρο ελαστικότητας E . C είναι η ταχύτητα μετάδοσης της διαταραχής.

3. Αδιαστατοποίηση προβλήματος

Σημειώνουμε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος είναι οι t και x . Επιλέγεται ως κλίμακα χρόνων το t_0 και μήκους x_0 . Εξαρτημένη μεταβλητή του προβλήματος είναι η μετατόπιση u . Επιλέγεται η u_0 ως κλίμακα μέτρησης των μετατοπίσεων.

Ορίζονται τα αδιάστατα μεγέθη:

$$u' = u / u_0, \quad t' = t / t_0, \quad x = x / x_0$$

οπότε η εξίσωση κύματος γράφεται:

$$\frac{u_0}{t_0^2} u_{tt}' + K \frac{u_0}{t_0} u_{t'}' = C^2 \frac{u_0}{x_0^2} u_{xx}' - g$$

$$u'_{tt'} + [K t_0] u'_{t'} = \left[C^2 \frac{t_0^2}{x_0^2} \right] u'_{x'x'} - \left[g \frac{t_0^2}{u_0} \right]$$

Αν δεχθούμε ότι οι επιδράσεις βάρους και απόσβεσης είναι αμελητέες τότε:

$$u'_{t't'} = C'^2 u'_{x'x'}$$

$$\text{όπου } C'^2 = C^2 \frac{t_0^2}{x_0^2}$$

Η παράμετρος C' εξαρτάται από την κλίμακα μηκών και κλίμακα χρόνου. Μπορεί να επιλεγεί ως x_0 ίση με το μήκος L της χορδής. Η κλίμακα χρόνου t_0 μπορεί να επιλεγεί τέτοια ώστε $C' = 1$. Στην περίπτωση αυτή

$$t_0 = \frac{L}{C}$$

Η εξίσωση κύματος τότε γράφεται σε αδιάστατη μορφή

$$u'_{t't'} = u'_{x'x'}$$

Συγχρόνως όμως πρέπει να αδιαστατοποιηθούν και οι οριακές συνθήκες.

$$u'(x', 0) = u_0 \frac{(x)}{U_0}, \quad t' = 0$$

$$u'_{t'}(x', 0) = 0$$

$$u'(0, t') = 0 \quad u'_{t'}(0, t') = 0$$

$$u'(1, t') = 0 \quad u'_{t'}(1, t') = 0$$