

## **Διανομή θερμοκρασίας και βαθμός απόδοσης πτερυγίων ψύξης**

### **9.1 Λεκτική Περιγραφή του φυσικού προβλήματος**

Για την αποδοτικότερη ψύξη επιφανειών και γενικότερα για την αύξηση του ρυθμού συναλλαγής θερμότητας από επιφάνεια προς τον περιβάλλοντα χώρο χρησιμοποιούνται πτερύγια ψύξης της επιφάνειας.

Παράδειγμα, τα πτερύγια ψύξης των αερόψυκτων εμβολοφόρων κινητήρων των μοτοποδηλάτων ή και τα πλέον σύνθετης μορφής πτερύγια ψύξης ή επαύξησης συναλλαγής θερμότητας των εναλλακτών θερμότητας. Τα πτερύγια ψύξης μπορεί να είναι ορθογωνικής διατομής, τριγωνικής, ελλειπτικής κλπ.

Στο παρόν πρόβλημα θα εξετασθούν μερικές μορφές πτερυγίων και θα αξιολογηθούν από την άποψη αποδοτικότητάς των ως προς τη δυνατότητά τους να επαυξήσουν τη συναλλαγή θερμότητας.

### **9.2 Κατάστροψη μαθηματικού προβλήματος**

Ο νόμος θερμικής αγωγιμότητας του Fourier μαζί με τη διατήρηση της θερμικής ενέργειας αποτελεί τη βάση της μαθηματικής προσομοίωσης του προβλήματος που λεκτικά περιγράφηκε στην παράγραφο 9.1.

Το πτερύγιο βρίσκεται σε περιβάλλοντα χώρο θερμοκρασίας  $T_0$  και ψύχεται έχοντας συντελεστή συναγωγής θερμότητας με το περιβάλλον ίσο με  $\alpha$ . Η θερμοκρασία στη βάση του πτερυγίου λαμβάνεται σταθερή και ίση με  $T_B$ . Για απλοποίηση του προβλήματος δεχόμαστε ότι η θερμοκρασία στο πτερύγιο μεταβάλλεται μόνο κατά την κατεύθυνση  $x$ , μετατρέποντας έτσι το πρόβλημα σε μονοδιάστατο.

Ο ενεργειακός ισολογισμός στον όγκο ελέγχου μήκους  $\Delta x$  είναι ως εξής:

Ο νόμος αγωγής του Fourier δίνει ότι δια την επιφάνειας  $A(x)$  (ανά μονάδα βάθους) διέρχεται το ποσόν θερμότητας (προς μεγαλύτερα  $x$  το ποσόν θερμότητας θεωρείται θετικό)

$$Q_x = - \left( K A \frac{dT}{dx} \right)_x$$

ενώ δια της επιφάνειας  $A(x + \Delta x)$  εξέρχεται το ποσόν θερμότητας

$$Q_{x+\Delta x} = - \left( K A \frac{dT}{dx} \right)_{x+\Delta x}$$

όπου  $K$  ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του πτερυγίου.

Ο διαγραμμισμένος χώρος όπου γίνεται ενεργειακός ισολογισμός αποδίδει θερμότητα προς το περιβάλλον δια συναγωγής ίση με

$$Q_{\text{περιβ}} = 2 \alpha \Delta s (T - T_0)$$

όπου

$\Delta s$  η παράπλευρη (ανά μονάδα βάθους) επιφάνεια συναλλαγής θερμότητας του πτερυγίου.

Αν θεωρήσουμε ότι η θερμική κατάσταση του πτερυγίου είναι αμετάβλητη με το χρόνο, τότε ο θερμικός ενεργειακός ισολογισμός γράφεται

$$-\left(K A \frac{dT}{dx}\right)_x = -\left(K A \frac{dT}{dx}\right)_{x+\Delta x} + 2\alpha \Delta s (T - T_0)$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\frac{d}{dx} \left[ K A \frac{dT}{dx} \right] = 2\alpha \frac{ds}{dx} (T - T_0)$$

ή για σταθερό συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας  $K$

$$A \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dT}{dx} = 2 \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{ds}{dx} (T - T_0) \quad (9.1)$$

### Οριακές συνθήκες

Το πρόβλημα είναι ελλειπτικού τύπου, άρα απαιτούνται οριακές συνθήκες στα άκρα του πτερυγίου, δηλαδή για  $x=0$  και  $x=L$ .

Η βάση του πτερυγίου διατηρείται σε σταθερή θερμοκρασία  $T_B$ , οπότε η αντίστοιχη οριακή συνθήκη γράφεται

$$T = T_B, \quad x = L \quad (9.2)$$

Στην κορυφή του πτερυγίου,  $x = 0$ , λόγω της μηδενικής εγκάρσιας επιφάνειας, το πσόν θερμότητας που μεταφέρεται με αγωγή θα είναι μηδέν, οπότε, μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad x = 0 \quad (9.3)$$

(αυστηρά η οριακή αυτή συνθήκη είναι ασθενής από φυσική άποψη. Τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν αν τοποθετηθεί ως οριακή συνθήκη ο μηδενισμός της δευτέρας παραγώγου, που όμως κάνει το πρόβλημα από μαθηματική άποψη μη σωστά τοποθετημένο). Για πτερύγιο ορθογωνικής διατομής η οριακή συνθήκη θα είναι:

$$K \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha (T - T_0)$$

Η διαφορική εξίσωση (9.1) μαζί με τις οριακές συνθήκες (9.2) και (9.3) αποτελούν τη μαθηματική έκφραση του φυσικού προβλήματος.

Η γενική μορφή της εξίσωσης (9.1) η οποία μπορεί να εκφράζει μια μεγάλη κατηγορία φυσικού προβλήματος είναι η

$$C(x)\frac{d^2\Phi}{dx^2} + D(x)\frac{d\Phi}{dx} + E(x)\Phi = F(x)$$

Η εξίσωση αυτή μαζί με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες στα άκρα ( $x=0$  και  $x=L$ ) εκφράζει τα διάφορα φυσικά προβλήματα.

### 9.3 Αδιαστατοποίηση του μαθηματικού προβλήματος

Η αδιαστατοποίηση του μαθηματικού προβλήματος οδηγεί στην εμφάνιση αδιαστάτων αριθμών που ελέγχουν το πρόβλημα και μειώνουν την πολυπαραμετρικότητά του. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι γνωστοί αριθμοί της Ρευστομηχανικής Reynolds, Mach, Froude κλπ. Και οι αριθμοί Nusselt, Bio, Eckert για φαινόμενα που έχουν σχέση με συναλλαγή θερμότητας.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το φυσικό φαινόμενο ελέγχεται από τη διαφορά των θερμοκρασιών  $(T_B - T_0)$ , από τις ιδιότητες του υλικού (συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας), του συντελεστή συναγωγής  $\alpha$  και τέλος από τη γεωμετρία του πτερυγίου.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  έχει κλίμακα μήκους  $L$ , ενώ ως κλίμακα αδιαστατοποίησης θερμοκρασιών λαμβάνει

$$\Delta T_0 = T_B - T_0$$

Η διαφορική εξίσωση αδιαστατοποιείται ως:

$$A \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} = 2 \frac{\alpha}{K} \frac{d}{dx^*} T^*$$

$$A \frac{\Delta T_0}{L^2} \frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} + \frac{\Delta T_0}{L} \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dT^*}{dx^*} = 2 \frac{\alpha}{K} \frac{ds}{dx} \Delta T_0 T^*$$

Ορίζεται αδιάστατη θερμοκρασία και μήκος

$$T^* = (T - T_0)/(T_B - T_0), \quad X^* = X/L$$

ή διαιρώντας με το  $A^* \frac{\Delta T_0}{L^2}$

$$\frac{d^2 T^*}{dx^{*2}} + \frac{L}{A} \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dT^*}{dx^*} = 2 \frac{\alpha}{K} \frac{L^2}{A} \frac{ds}{dx} \cdot T^*$$

Η ποσότητα  $\frac{\alpha L}{K}$  εκφράζει το γνωστό αριθμό Nusselt,  $N_u = \alpha L/K$ .

$$\text{Είναι όμως } \frac{ds}{dx} = \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Οπότε

$$\frac{d^2 T}{d x^{*2}} + D(x) \frac{d T^*}{d x^*} - E(x) T^* = 0$$

$$x^* = 0, \quad \frac{d T^*}{d x^*} = 0$$

$$x^* = 1, \quad T^* = 1$$

$$D(x) = \frac{L}{A} \frac{dA}{dx}, \quad E(x) = 2 \frac{a}{K} \frac{L^2}{A} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{dA}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{ή}$$

$$D(x^*) = \frac{1}{A^*} \cdot \frac{dA^*}{dx^*}, \quad E(x^*) = 2 \frac{aL}{K} \frac{1}{A^*} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{dA^*}{dx^*} \right)^2 \right]^{1/2}$$

ο αριθμός  $E(x^*)$  αποτελεί έκφραση ενός γενικευμένου αριθμού Nusselt.

#### 9.4 Τυπικά μεγέθη του φυσικού προβλήματος

Τα πτερύγια ψύξης κατασκευάζονται από διάφορα υλικά, αναλόγως τις περιοχές εφαρμογής των, όπως κράματα αλουμινίου (πτερύγια ψύξης ΜΕΚ) ή από χαλκό (πτερύγια εναλλακτών θερμότητας). Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει τυπικές τιμές θερμικής αγωγιμότητας κάποιων υλικών.

| Υλικά       | K (Wm <sup>-1</sup> κ <sup>-1</sup> ) | Cp (J g <sup>-1</sup> κ <sup>-1</sup> ) |
|-------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|
| Αλουμίνιο   | 190                                   | 0,90                                    |
| Χαλκός      | 390                                   | 0,39                                    |
| Σίδηρος     | 78                                    | 0,45                                    |
| Μόλυβδος    | 37                                    | 0,13                                    |
| Χάλυβας     | 46                                    | 0,49                                    |
| Ψευδάργυρος | 6,3                                   | 0,23                                    |
| Γρανίτης    | 2,5                                   | 0,88                                    |

Στον πίνακα επίσης δίνονται τιμές του συντελεστή θερμοχωρητικότητας του υλικού Cr μέγεθος που θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενη άσκηση μαθηματικής προσομοίωσης.

Προκειμένου να συγκριθεί η αποδοτικότητα ψύξης των πτερυγίων συγκρίνονται οι βαθμοί απόδοσης των πτερυγίων (ίδιου ύψους L).

Ορίζεται βαθμός απόδοσης του πτερυγίου, η ποσοστιαία επαύξηση της εναλλασσόμενης ποσότητας θερμότητας.

Ετσι,

$$\eta = \frac{\int_{x=0}^L 2\alpha(T - T_0) ds}{\alpha B(T_B - T_0)} - 1$$

ή

$$\eta = \frac{\int_{x=0}^L 2T^* ds^*}{B^*} - 1 = \frac{2}{B^*} \int_{x=0}^1 T^* \left( \frac{dS}{dx^*} \right) \cdot dx^* - 1$$

Επίσης ο βαθμός απόδοσης του πτερυγίου μπορεί να γραφεί ως

$$\eta = \frac{-KB \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=L}}{\alpha B(T_B - T_0)} - 1 \quad \text{ή}$$

$$\eta = \frac{-\left( \frac{dT^*}{dx^*} \right)_{x^*=1}}{N_u} - 1$$

## 9.5 Ειδικές περιπτώσεις

### 9.5.1 Πτερύγιο τριγωνικής μορφής

Η έκφραση της συνάρτησης A(x) είναι

$$A(x) = \frac{B}{L} \cdot x, \quad A^*(x^*) = \frac{B}{L} x^*$$

οπότε οι συντελεστές (από τα αδιάστατα μεγέθη)

$$\frac{dA^*}{dx^*} = \frac{B}{L}$$

$$D(x^*) = \frac{1}{\frac{B}{L}x^*} \frac{B}{L} = \frac{1}{x^*}, (x^*) = \frac{2aL}{K} \frac{1}{\frac{B}{L}x^*} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{B}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$E(x) = 2 \frac{aL}{K} \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{2} \frac{B}{L} \right)^2}}{Bx^*}$$

$$E(x^*) = 2 \frac{aL}{K} \frac{L}{B} \frac{1}{x^*} \sqrt{1 + \frac{B^2}{4L^2}}$$

### 9.5.2 Πτερύγιο παραβολικής μορφής Ι

$$A(x) = \frac{B}{L^2} x^2, \quad A^*(x^*) = \frac{B}{L} x^{*2}, \quad \frac{dA^*}{dx^*} = \frac{2B}{L} x^*$$

$$D(x) = \frac{1}{\frac{B}{L}x^L} \cdot \frac{\beta}{L} \cdot 2x^* = \frac{2}{x^*}$$

$$E(x^*) = \frac{2aL^2}{BKx^{*2}} \sqrt{1 + \left( \frac{Bx^*}{L} \right)^2}$$

### 9.5.3 Πτερύγιο παραβολικής μορφής ΙΙ

Το πτερύγιο αυτό έχει αναλυτική έκφραση

$$A(x) = B \sqrt{\frac{x}{L}}$$

### 9.5.4 Πτερύγιο ορθογωνικής μορφής

Στην περίπτωση αυτή η οριακή συνθήκη στην "κορυφή" του πτερυγίου ( $x = 0$ ) είναι

$$K B \left( \frac{dT}{dx} \right) = B \cdot a(T - T_0)$$

ή

$$\frac{dT^*}{dx^*} = \frac{aL}{K} \cdot T^*$$

Επίσης:

$$A(x)=B, \qquad A^*=\frac{B}{L}$$

$$\frac{dA^*}{dx}=0$$

$$\frac{dS}{dx}=1$$

$$D(x^*)=0$$

$$E(x^*)=2\frac{a}{K}\frac{L^2}{B}\left[1+\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2aL^2}{KB}$$