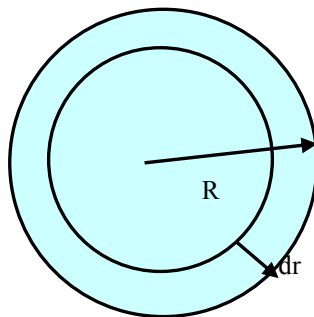


Μεταβολή της θερμοκρασίας με το χρόνο σφαιρικού σωματιδίου

1. Λεκτική περιγραφή του φυσικού προβλήματος:

Να υπολογισθεί η μεταβολή της θερμοκρασίας με το χρόνο σφαιρικού σωματιδίου, αρχικής θερμοκρασίας T_{p_0} μέσα σε περιβάλλον διαφορετικής θερμοκρασίας και ίσης με T_0 .

$$t=0 \quad T_p=T_{p_0}$$



2. Μαθηματική θεμελίωση :

2.1. Η Διαφορική εξίσωση ενεργειακού ισολογισμού

Έστω σφαίρα ακτίνας R . Δεχόμαστε για απλοποίηση του προβλήματος ότι η θερμοκρασία του σωματιδίου είναι σταθερή σε ακτίνα r (σφαιρική συμμετρία). Σε πάχος dr της σφαίρας ο ενεργειακός ισολογισμός οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

Έστω $T(r,t)$ η θερμοκρασία του σωματιδίου στη θέση r και τη χρονική στιγμή t . Θερμότητα προς τα έξω του σφαιρικού κελύφους :

$$q_{r+dr} = - \left(K 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

όπου K ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του σωματιδίου.

Θερμότητα προς τα μέσα του σφαιρικού κελύφους : $q_r = - \left(K 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \right)_r$

Ρυθμός – Αύξηση θερμοχωρητικότητας : $\frac{d}{dt}(\rho 4\pi r^2 dr C_p T)$

$$\frac{d}{dt}(\rho 4\pi r^2 dr C_p T) = - \left(K 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \right)_r + \left(K 4\pi r^2 \frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}$$

ή

$$\frac{dT}{dt} = \frac{K}{\rho C_p} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dt} \right)$$

2.2. Οριακές Συνθήκες

Η διαφορική εξίσωση είναι παραβολικού τύπου. Απαιτούνται αρχικές συνθήκες για $t=0$ και οριακές συνθήκες για $t > 0$.

$$t = 0 \quad T(r,0) = T_{p_0} \quad 0 \leq r \leq R$$

$$\text{για } t > 0, \quad \begin{aligned} r = 0 \quad & \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ r = R \quad & \left[-K \frac{\partial T}{\partial r} \right]_R = a (T_s - T_0) \end{aligned}$$

όπου a ο συντελεστής συναγωγής θερμότητας και T_s η θερμοκρασία του σωματιδίου στην επιφάνειά του.

3. Αδιαστατοποίηση του προβλήματος :

Ως κλίμακα αδιαστατοποίησης μηκών λαμβάνεται η ακτίνα R της σφαίρας, ενώ για τους χρόνους η κλίμακα χρόνου t_0 . Η θερμοκρασία αδιαστατοποιείται με $\Delta T = T_0 - T_{p0}$. Έτσι ορίζονται τα αδιάστατα μεγέθη:

$$r^* = r/R, \quad t^* = t/t_0 \quad \text{και} \quad T^* = \frac{T - T_{p0}}{T_0 - T_{p0}}$$

Η διαφορική εξίσωση ενεργειακού ισολογισμού γράφεται :

$$\begin{aligned} \frac{(T_0 - T_p)}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= \frac{K}{\rho C_p} \frac{(T_0 - T_p)}{R^2} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= \left(\frac{K}{\rho C_p} \frac{t_0}{R^2} \right) \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Εκλέγω κλίμακα χρόνου } t_0 \text{ τέτοια ώστε } \frac{K}{\rho C_p} \frac{t_0}{R^2} = 1 \quad \text{ή} \quad t_0 = R^2 \frac{\rho C_p}{K}$$

Οι αδιαστατοποιημένες οριακές συνθήκες γράφονται :

- $r^* = 0 \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad (\nabla t)$

- $r^*=1 \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{aR}{K} \frac{(T_0 - T_s)}{T_0 - T_{p0}} = B_i \frac{T_0 - T_s}{T_0 - T_{p0}} = B_i(1 - T_s^*) \quad (\forall t)$

όπου B_i ο αριθμός Biot $= aR/K$ και T_s η θερμοκρασία στην επιφάνεια της σφαίρας .

Η αρχική συνθήκη γράφεται : $t^*=0, T^*=0$

Έτσι το αδιαστατοποιημένο πρόβλημα (μετά τη αφαίρεση του δείκτη *) γράφεται :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$r=0 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$\text{για } \forall t \quad r=1 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = B_i(1 - T)$$

$$t=0 \quad T=0$$