



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Ρευστών

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ
C.A.F.F.C.A.

Δ. ΜΠΟΥΡΗΣ - Γ. ΜΠΕΡΓΕΛΕΣ



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>	<u>7</u>
<u>2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>	<u>10</u>
2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	10
2.1.1 Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης	13
2.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	14
2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΙΕΣΗΣ	20
2.3.1 Αντιμετώπιση στα όρια του υπολογιστικού χώρου	24
2.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	26
2.4.1 Οριακές συνθήκες ταχυτήτων παράλληλων σε τοίχωμα, συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions).	29
2.4.2 Περίληψη των οριακών συνθηκών	32
2.5 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	33
<u>3. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Η./Υ.</u>	<u>38</u>
3.1 ΒΑΣΙΚΗ ΔΟΜΗ	38
3.2 ΠΑΡΟΧΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ	43
<u>4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>	<u>53</u>
4.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΨΥΞΗ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΧΟΥΣ, ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ)	54
4.2 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΨΥΞΗ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΧΟΥΣ, ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ)	56
4.3 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ, ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ)	58

4.4 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΛΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ, ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ)	60
4.5 ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΗ ΡΟΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΔΥΟ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ	61
4.6 ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΟΙΧΩΜΑ.	65
4.7 ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΕΠΤΥΓΜΕΝΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	67
4.8 ΡΟΗ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ ΔΥΟ ΡΕΥΜΑΤΩΝ ΡΕΥΣΤΟΥ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	69
4.9 ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ ΠΛΑΚΑ (2Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ STOKES)	71
4.10 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΚΟΙΛΩΜΑ ΜΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΟΡΙΟ	73
4.11 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΣΚΑΛΟΠΑΤΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ	78
4.12 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΣΚΑΛΟΠΑΤΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ	81
5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	86
6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΡΧΕΙΑ ΕΙΣΟΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (CTINPUT)	88

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος έχει σκοπό να παρουσιάσει ένα γενικό αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης ρευστομηχανικών προβλημάτων τεχνολογικού ενδιαφέροντος. Ο αλγόριθμος επιλύει με τη μεθοδολογία των πεπερασμένων όγκων τις διαφορικές εξισώσεις της ρευστομηχανικής, χαρακτηρίζεται όμως από τη φιλικότητα στον χρήστη ώστε να μην είναι απαραίτητη η λεπτομερής γνώση της διαδικασίας επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων. Για την εμπέδωση της χρήσης του προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, παρουσιάζεται κατά συστηματικό τρόπο η διαδικασία λύσης καθώς και η κριτική αποτελεσμάτων 12 επιλεγμένων προτύπων πεδίων ροής (στρωτά και τυρβώδη, με ή χωρίς μετάδοση θερμότητας). Έτσι προσδοκάται ότι με τη συστηματική μελέτη των ασκήσεων αυτών ο χρήστης του προγράμματος θα μπορέσει αυτόνομα να διερευνήσει δικά του ρευστομηχανικά προβλήματα ή και να επεκτείνει τις δυνατότητες του υπολογιστικού κώδικα. Ο κώδικας αποτελεί προϊόν μακρόχρονης προσπάθειας του διδάκτορα μηχανολόγου μηχανικού Δ. Μπούρη και του υπογράφοντος, ελπίζουμε δε να εκτιμηθεί δεόντως από τους συναδέλφους μηχανικούς, προς τους οποίους και απευθύνεται.

Ιούλιος, 1997

Καθ. Γ. Μπεργελές

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο εγχειρίδιο αυτό παρουσιάζεται μια μεθοδολογία για την αριθμητική επίλυση των ρευστομηχανικών πεδίων ροής ασυμπίεστων ρευστών. Τέτοια πεδία ροής είναι η ροή ρευστού μέσα σε αγωγούς απλής ή και σύνθετης γεωμετρίας (π.χ. απότομη διεύρυνση αγωγού), ελεύθερη ροή πάνω από επίπεδη πλάκα (ανάπτυξη οριακού στρώματος), ροή σε κοιλότητα κ.τ.λ. Με την ευρύτερη έννοια ο όρος “ρευστό” μπορεί να συμπεριλάβει πολλά υλικά, χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αντιμετώπιση ρευστοποιημένου πλαστικού ή και χάλυβα στη φάση παραγωγής. Είναι λοιπόν φανερό η ευρύτητα των δυνατοτήτων εφαρμογής της μεθοδολογίας, ιδίως αν σημειωθεί ότι μπορεί να αποτελέσει το βασικό μέρος παραπέρα ανάπτυξης για την αντιμετώπιση διφασικών ροών, ισόθερμων ή και με καύση (εφαρμογή στον σχεδιασμό θαλάμων καύσης κ.τ.λ.). Η δημιουργία υπολογιστικών μεθοδολογιών για την αντιμετώπιση προβλημάτων όπως αυτά που ενδεικτικά αναφέρθηκαν πιο πάνω είναι πολύ σημαντική λόγω της εξοικονόμησης χρόνου σχεδίασης και του σημαντικά μικρότερου κόστους τους. Μια σωστή υπολογιστική προσομοίωση ενός ρευστομηχανικού φαινομένου είναι σαφώς προτιμότερη από την πειραματική μελέτη του, πράγμα που γίνεται εμφανές αν η μελέτη περιλαμβάνει και παραμετρικές επιδράσεις στο φαινόμενο. Υπολογιστικά, η αλλαγή μιας παραμέτρου είναι πιο απλή από την αλλαγή της πειραματικής διάταξης και την επανάληψη των μετρήσεων. Εννοείται ότι οι βασικές γνώσεις υπολογιστικής ρευστομηχανικής θα διευκολύνουν πολύ την ανάγνωση και κατανόηση του παρόντος. Προτείνονται τα βιβλία : “Υπολογιστική Ρευστομηχανική” (1994) Γ. Μπεργελέ, “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer” (1984) D. Anderson, J. Tannehill & R. Pletcher και “Numerical Computation of Internal and External Flows vols. 1&2” (1990) C. Hirsch.

Η μεθοδολογία (και ο υπολογιστικός κώδικας σε FORTRAN) που θα παρουσιαστεί είναι βασισμένη σε αξονοσυμμετρικές ή και διδιάστατες (καρτεσιανές) συντεταγμένες χωρίς όμως να αποκλείεται η μετατροπή της και για καμπυλόγραμμες. Τα πεδία ροής που αντιμετωπίζει μπορεί να είναι στρωτά ή τυρβώδη με ή χωρίς μεταφορά θερμότητας. Υπάρχει δε και η δυνατότητα για την επίλυση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας μέσα σε στερεό υλικό. Επί πλέον μπορούν να γίνουν υπολογισμοί οι οποίοι να παρακολουθούν την χρονική

εξέλιξη ενός φαινομένου ή και να υπολογίζεται απ'ευθείας η μόνιμη κατάσταση στην οποία μπορεί να καταλήξει. Ο υπολογιστικός κώδικας, για λόγους αναφοράς, "βαπτίστηκε" C.A.F.F.C.A. από τα αρχικά των λέξεων Collocated Approach to a Fluid Flow Calculation Algorithm. Ο κώδικας δημιουργήθηκε στο Εργαστήριο Αεροδυναμικής του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π., βασίστηκε πάνω στη μεθοδολογία SIMPLE (Patankar and Spalding, 1972) αλλά διαφέρει ουσιαστικά από αυτήν ιδίως στον τρόπο αποθήκευσης των εξαρτημένων μεταβλητών και στην διαδικασία υπολογισμού της πίεσης.

Ο κώδικας CAFFCA χρησιμοποιείται από τους σπουδαστές Μηχανολόγους Μηχανικούς του Ε.Μ.Π. στο μάθημα της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής για την επίλυση βασικών προβλημάτων ροής και, σε προηγμένη μορφή του, από φοιτητές σε διπλωματικές ή μεταπτυχιακές εργασίες για την διερεύνηση υπαρκτών προβλημάτων τόσο της βιομηχανίας όσο και της βασικής έρευνας. Τονίζεται πάντως ότι η επίλυση ρευστομηχανικών προβλημάτων είναι ένα ευρύτατο αλλά και δύσκολο πεδίο το οποίο δεν μπορεί να καλυφθεί από μια και μόνο μέθοδο προσέγγισης. Πολύ περισσότερο δε από έναν και μοναδικό αριθμητικό αλγόριθμο. Στόχος του παρόντος συγγράμματος δεν είναι η παροχή ενός αριθμητικού εργαλείου που να επιλύει όλα τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν, αλλά περισσότερο η παροχή ενός εργαλείου που να δίνει τη δυνατότητα στον μηχανικό να διερευνήσει αριθμητικά κάποιες περιπτώσεις προβλημάτων της μηχανικής των ρευστών, παρέχοντας συγχρόνως και την ευκαιρία να εμβαθύνει σε αυτά.

Η εφαρμογή του CAFFCA για την επίλυση ρευστομηχανικών προβλημάτων γίνεται με ελάχιστες επεμβάσεις στον κώδικα και πιο συγκεκριμένα μέσω αλλαγών σε αρχείο εισόδου δεδομένων. Στο κεφάλαιο 2 που ακολουθεί παρουσιάζεται κατ'αρχήν η μαθηματική θεωρία στην οποία βασίζεται η επίλυση καθώς και λεπτομέρειες σχετικά με την εφαρμογή της. Σημειώνεται ότι συνιστάται η εμβάθυνση στην αριθμητική μεθοδολογία, δεν είναι όμως απαραίτητη για την εφαρμογή του κώδικα. Στο τρίτο κεφάλαιο δίνεται η βασική δομή του κώδικα ενώ ορίζονται και οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν. Τα στοιχεία αυτά είναι και πάλι εξειδικευμένου χαρακτήρα μιας και, για την εφαρμογή του κώδικα, η μόνη επέμβαση του χρήστη γίνεται στη φάση εισαγωγής δεδομένων. Αυτό, καλύπτεται στην τελευταία παράγραφο του τρίτου κεφαλαίου όπου περιγράφεται η διαδικασία εισαγωγής δεδομένων και κυρίως η λογική της κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρέχονται έτοιμα τα δεδομένα εισόδου για την εφαρμογή του κώδικα σε πλήθος

χαρακτηριστικών ρευστομηχανικών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα των εφαρμογών αυτών παρουσιάζονται μαζί με μια μικρή ανάλυση και επεξήγησή τους. Έτσι ο αναγνώστης έχει μια εποπτεία των συνηθισμένων τρόπων παροχής δεδομένων και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν, αποκτά εμπειρία στην χρήση του κώδικα και δυνατότητα εφαρμογής του σε πλήθος άλλων ρευστομηχανικών προβλημάτων.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι εξισώσεις που εκφράζουν το ρευστομηχανικό πεδίο ροής είναι οι εξισώσεις Reynolds για τυρβώδη πεδία ροής οι οποίες προκύπτουν από την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων Navier-Stokes. Θεωρώντας ένα στοιχείο ρευστού που κινείται, οι εξισώσεις Reynolds, με πολύ απλά λόγια, εκφράζουν αφ' ενός τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του στοιχείου αυτού και αφ' ετέρου όλες τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, είτε λόγω πίεσης, είτε λόγω της συνεκτικότητας του ρευστού (μπορεί να προστεθούν, ανάλογα με την περίπτωση, και δυνάμεις άνωσης, Coriolis κ.τ.λ.). Όταν η ροή που εξετάζεται είναι τυρβώδης (υπάρχουν υψηλόσυχνες χρονικές διαταραχές των μεγεθών γύρω από τη μέση τιμή τους), κατά την χρονική ολοκλήρωση προκύπτουν οι λεγόμενες τάσεις Reynolds οι οποίες είναι στατιστικές συσχετίσεις των διαταραχών των ρευστομηχανικών μεγεθών. Δεν θα γίνει αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας αυτής αλλά ο αναγνώστης μπορεί να βρεί λεπτομέρειες σχετικά με τις αριθμητικές μεθοδολογίες στα βιβλία υπολογιστικής ρευστομηχανικής των Γ. Μπεργελέ (1994), D. Anderson et al. (1984), C. Hirsch (1990).

Από το πλήθος των προσεγγίσεων που έχουν αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία για την αντιμετώπιση των τάσεων Reynolds, στη παρούσα μεθοδολογία έγινε επιλογή της υπόθεσης Boussinesq η οποία συνδέει τις τάσεις Reynolds με τον τοπικό ρυθμό παραμόρφωσης του μέσου πεδίου μέσω του συντελεστή τυρβώδους συνεκτικότητας (μ_t):

[2.1.1]

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k$$

όπου $i,j=1,2,3$ και υποδηλώνουν τις τρεις καρτεσιανές κατευθύνσεις (x_i) και τις αντίστοιχες συνιστώσες των ταχυτήτων (u_i). Το k είναι η τθρβώδης κινητική ενέργεια στην οποία θα γίνει αναφορά και στη συνέχεια. Η τυρβώδης συνεκτικότητα (μ_t) έρχεται να προστεθεί στην συνεκτικότητα του ρευστού (μ_l), η οποία είναι φυσική ιδιότητά του, και εκφράζει την αυξημένη διάχυση που παρατηρείται στα τυρβώδη πεδία ροής. Για τον υπολογισμό όμως της τυρβώδους συνεκτικότητας απαιτείται επίλυση επί πλέον διαφορικών εξισώσεων μιας και δεν είναι ιδιότητα του ρευστού αλλά εξαρτάται από το πεδίο ροής και μεταβάλλεται τοπικά. Οι εξισώσεις που επιλύονται είναι οι διαφορικές εξισώσεις μεταφοράς για την τυρβώδη κινητική ενέργεια (k) (τυρβώδης κινητική ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί η συνολική κινητική ενέργεια που αντιπροσωπεύεται από τις υψηλόσυχνες διαταραχές των ταχυτήτων) και τον ρυθμό απορρόφησής της (ϵ). Η μοντελοποίηση της τύρβης είναι από τα ευρύτερα σύγχρονα πεδία έρευνας στην υπολογιστική ρευστομηχανική και η οποιαδήποτε προσπάθεια συνοπτικής παρουσίασης κινδυνεύει είτε να υπεραπλουστεύσει είτε να αφήσει τον αναγνώστη με περισσότερα ερωτηματικά από αυτά με τα οποία ξεκίνησε. Για εμβάθυνση στο θέμα προτείνονται τα συγγράμματα Tennekes and Lumley (1972), Hinze (1975) και Lesieur (1990).

Έτσι, οι εξισώσεις που επιλύονται τελικά εκφράζουν την διατήρηση της μάζας, ορμής, τυρβώδους κινητικής ενέργειας (k) και του ρυθμού καταστροφής της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (ϵ). Προστίθεται δε και εξίσωση μεταφοράς της ενθαλπίας (ή θερμοκρασίας αν θεωρηθεί σταθερή η ειδική θερμοχωρητικότητα C_p). Στην παρούσα ανάπτυξη οι εξισώσεις αυτές θα εκφραστούν σε αξονοσυμμετρικές συντεταγμένες για χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο ροής. Οι εξισώσεις έχουν όλες την ίδια μορφή εμφανίζοντας όρους μεταφοράς (συναγωγής) και διάχυσης καθώς και έναν όρο πηγής (S_Φ) ο οποίος είναι ο μόνος όρος στην γενική μορφή των εξισώσεων που αλλάζει ανάλογα με την μεταβλητή (Φ). Η γενική μορφή των εξισώσεων φαίνεται παρακάτω :

[2.1.2]

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho r \Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r \Phi) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r \Phi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(r \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right\} = S_\Phi$$

όπου (Φ) μπορεί να πάρει τις τιμές 1 -εξ. συνέχεια, u -αξονική συνιστώσα της ταχύτητας, v - ακτινική, T -θερμοκρασία (ή h -ενθαλπία), k -τυρβώδης κινητική ενέργεια και ϵ -ρυθμός

καταστροφής της (δύο μεταβλητές για το μοντέλο τύρβης). Ο όρος πηγής παίρνει, ανάλογα με την μεταβλητή, τις τιμές που φαίνονται παρακάτω (Πίνακας 2.1.1).

Όταν πρόκειται να εκφραστούν οι εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες τότε αρκεί το (r) να αντικατασταθεί με (y) στις μερικές παραγώγους και με (r=1) όπου εμφανίζεται μόνο του. Εξαίρεση αποτελούν οι όροι καμπυλότητας με (v/r) οι οποίοι εξαφανίζονται εντελώς από τον όρο πηγής της (v)-ορμής και από το (G).

-Φ-	-S _Φ -
1	0
u	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
v	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2\mu v}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$
T	0
k	G-ρε
ε	$(C_1 \varepsilon G - C_2 \rho \varepsilon^2)/k$
	$G = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$

Πίνακας 2.1.1. Τιμές του όρου πηγής

Επίσης ορίζονται και οι υπόλοιπες μεταβλητές με βάση το μοντέλο τύρβης k-ε:

[2.1.3]

$$\Gamma_{\Phi} = \frac{\mu}{\sigma_{\Phi}} \quad , \quad \mu_t = C_{\mu} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad , \quad \mu = \mu_t + \mu_l$$

όπου (μ) είναι η ενεργός συνεκτικότητα που ορίζεται ως το άθροισμα της (μ_l) που είναι η δυναμική συνεκτικότητα του ρευστού και της (μ_t) που είναι η τυρβώδης συνεκτικότητα όπως ορίζεται από την υπόθεση του Boussinesq ([2.1.1]). Οι σταθερές για το μοντέλο τύρβης k-ε είναι:

[2.1.4]

$$\begin{array}{lll} C_1=1.44 & C_2=1.92 & C_\mu=0.09 \\ \sigma_{(u,v)}=1. & \sigma_k=0.9 & \sigma_\varepsilon=1.3 \end{array}$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις που παρουσιάστηκαν πιο πάνω παίρνουμε τις χρονικές μέσες τιμές των μεταβλητών και με αυτές το πεδίο ροής θεωρείται γνωστό. Παρατηρώντας τις εξισώσεις των διαφορών μεταβλητών, βλέπουμε ότι είναι στενά δεμένες μεταξύ τους (με την εμφάνιση των αγνώστων μεταβλητών σε όλες σχεδόν τις εξισώσεις) προσδίδοντας στο πρόβλημα έναν ισχυρά μη-γραμμικό χαρακτήρα. Φυσικά εκτός από τις εξισώσεις αυτές, για την επίλυση ενός προβλήματος, είναι απαραίτητες και οι αρχικές και οριακές συνθήκες για τις οποίες θα γίνει λόγος σε επόμενη παράγραφο. Η μεγαλύτερη δυσκολία κατά την επίλυση οφείλεται σ'αυτήν ακριβώς την εξάρτηση των εξισώσεων μεταξύ τους και μάλιστα κυρίως όσον αφορά στις εξισώσεις ορμής για την αξονική και την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας. Στις εξισώσεις αυτές περιέχεται η άγνωστη κλίση της πίεσης που έχει συγχωνευτεί στους όρους πηγής (S_Φ), ενώ οι αντίστοιχες μεταβλητές συνδέονται και μέσω της εξίσωσης της συνέχειας στην οποία δεν εμφανίζεται καν η πίεση. Μία σωστή επίλυση του συστήματος των εξισώσεων θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη της την αλληλεξάρτηση των μεταβλητών έτσι ώστε κατά την διάρκεια της επίλυσης να γίνονται διαδοχικές διορθώσεις στις μεταβλητές και να οδηγείται το σύστημα στην σύγκλιση (λύση).

2.1.1 Περιγραφή της μεθόδου επίλυσης

Η μεθοδολογία που θα παρουσιαστεί βασίζεται στην μέθοδο SIMPLE και τον αλγόριθμο TDMA για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Πιο αναλυτικά η μέθοδος είναι:

(α) Γίνεται χρήση ενός σχήματος πεπερασμένων διαφορών όπου οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι οι ταχύτητες και η πίεση καθώς και οι μεταβλητές (k), (ε) του μοντέλου τύρβης και άλλες μεταβλητές όπως η θερμοκρασία (T) κ.τ.λ.

(β) Η πίεση προκύπτει από μία εξίσωση η οποία είναι συνδυασμός της εξίσωσης της συνέχειας και των εξισώσεων διατήρησης της ορμής (δίνοντας έτσι μία εξίσωση γνωστή στη βιβλιογραφία ως εξίσωση Poisson για την πίεση).

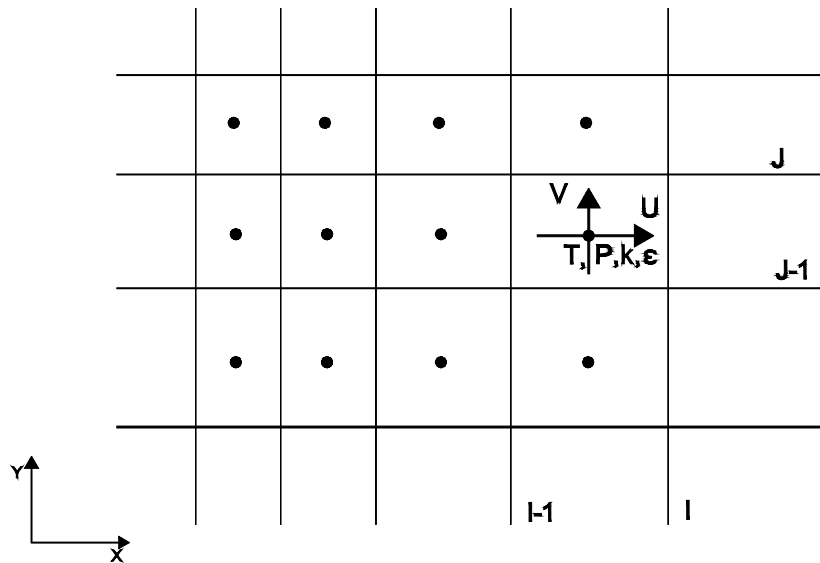
(γ) Το πεδίο της πίεσης αρχικά λαμβάνεται αυθαίρετο και επιλύονται οι εξισώσεις ορμής με το δεδομένο πεδίο πίεσης. Όμως, οι ταχύτητες που υπολογίζονται από τις εξισώσεις ορμής δεν ικανοποιούν την εξίσωση διατήρησης της μάζας (ή την εξίσωση Poisson για την πίεση) και είναι απαραίτητη κάποια διόρθωσή τους. Η διόρθωση του πεδίου των ταχυτήτων γίνεται μέσω μιας αντίστοιχης διόρθωσης στο πεδίο της πίεσης έτσι ώστε τελικά να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Μετά από τις διορθώσεις αυτές, η διαδικασία επαναλαμβάνεται (θα περιγραφεί λεπτομερώς σε επόμενη παράγραφο) μέχρι οι λύσεις πεδίου ταχυτήτων και πίεσης να ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις (ορμής αλλά και συνέχειας).

(δ) Η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε ομόθετο (collocated) πλέγμα όπου όλες οι μεταβλητές αποθηκεύονται στο κέντρο των πλεγματικών κυψελών. Εδώ συνίσταται και η διαφορά από τον αλγόριθμο SIMPLE που χρησιμοποιεί μετατοπισμένο (staggered) πλέγμα. Η σημασία του γεγονότος αυτού θα γίνει εμφανής στην επόμενη παράγραφο.

(ε) Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων γίνεται με την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος (TDMA).

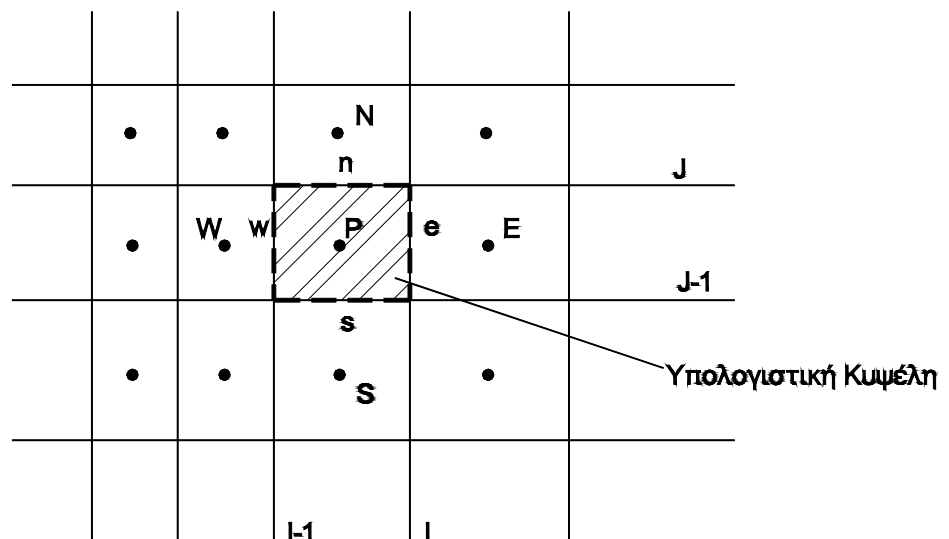
2.2 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ο τρόπος αποθήκευσης των μεταβλητών φαίνεται στο Σχήμα 2.2.1. Σε ήδη υπάρχουσα προσέγγιση (αλγόριθμος SIMPLE) γινόταν χρήση μετατοπισμένου πλέγματος (staggered grid) όπου τα βαθμωτά μεγέθη αποθηκεύονταν στους αριθμητικούς κόμβους ενώ τα διανυσματικά μεγέθη ενδιάμεσα των αριθμητικών κόμβων (μετατοπισμένα). Ο σκοπός αυτού του τρόπου αποθήκευσης ήταν η αποθήκευση των πιέσεων εκατέρωθεν των θέσεων αποθήκευσης των ταχυτήτων για την καλύτερη αντιμετώπιση της πρώτης παραγώγου της πίεσης που εμφανίζεται στις εξισώσεις ορμής (Πίνακας 2.1.1). Με τον τρόπο αποθήκευσης που προτείνεται τώρα όπου όλα τα μεγέθη αποθηκεύονται στο ίδιο σημείο (ομόθετο πλέγμα), το κέντρο των πλεγματικών κυψελών, υπάρχει προφανώς μεγάλο κέρδος σε απλότητα αφού είναι μία και μοναδική η θέση αποθήκευσης για όλες τις μεταβλητές. Όμως, είναι αναγκαία μία ειδική μεταχείριση για την κλίση πίεσης, όπως θα περιγραφεί αναλυτικά σε επόμενη παράγραφο.



Σχήμα 2.2.1. Θέσεις αποθήκευσης μεταβλητών.

Ο προτεινόμενος, ομόθετος, τρόπος αποθήκευσης (collocated grid) θεωρεί ότι όλες οι μεταβλητές αποθηκεύονται στα κέντρα των πλεγματικών κυψελών κατά τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 2.2.1 δηλαδή πίσω και κάτω από τον κόμβο των πλεγματικών γραμμών I,J. Τα διάφορα πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα των εναλλακτικών τρόπων αποθήκευσης για το ομόθετο πλέγμα θα αναφέρονται στις αντίστοιχες παραγράφους.



Σχήμα 2.2.2. Όγκος αναφοράς (υπολογιστική κυψέλη)

Οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για κάθε μεταβλητή (Φ) προκύπτουν ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις [2.1.2] πάνω στον όγκο αναφοράς που ορίζεται από τις πλεγματικές κυψέλες (στην ουσία πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss ή του Green στο χώρο) και εκφράζοντας το αποτέλεσμα ως συνάρτηση των τιμών της μεταβλητής στα γειτονικά πλεγματικά σημεία. Ο όγκος αναφοράς που χρησιμοποιείται είναι ο ίδιος για όλες τις μεταβλητές και φαίνεται, μαζί με τους απαιτούμενους συμβολισμούς, στο Σχήμα 2.2.2. Οι όροι μεταφοράς και διάχυσης μετατρέπονται σε επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στις τέσσερις επιφάνειες n,s,e,w που φαίνονται στο Σχήμα 2.2.2 ενώ ο όρος πηγής γραμμικοποιείται έτσι ώστε οι εξισώσεις [2.1.2] να γίνουν:

[2.2.1]

$$\left(\rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e A_e - \left(\rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w A_w + \left(\rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n A_n - \left(\rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s A_s = (S_p \Phi_p + S_U) Vol$$

Στην παραπάνω εξίσωση [2.2.1] οι δείκτες των παρενθέσεων δηλώνουν μέση τιμή της εντός παρενθέσεως ποσότητας πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια που φαίνεται στο Σχήμα 2.2.2 και με (Vol) συμβολίζεται ο όγκος της υπολογιστικής κυψέλης (όγκος αναφοράς, $\delta x \cdot \delta y$). Οι όροι πηγής που έχουν γραμμικοποιηθεί στην [2.2.1] παρακάτω (Πίνακας 2.2.1).

- Φ -	- S_p^{Φ} -	- S_U^{Φ} -
1	0	$-\frac{\partial \rho}{\partial t}$
u	$-\frac{\rho}{\delta t}$	$\frac{(\rho u)^{n-1}}{\delta t} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
v	$-\frac{2\mu}{r^2} - \frac{\rho}{\delta t}$	$\frac{(\rho v)^{n-1}}{\delta t} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right)$
k	$-C_{\mu} \rho^2 k / \mu_t - \rho / \delta t$	$(\rho k)^{n-1} / \delta t + G$
ε	$-C_2 \rho \varepsilon / k - \rho / \delta t$	$(\rho \varepsilon)^{n-1} / \delta t + C_1 C_{\mu} G \rho k / \mu_t$

Πίνακας 2.2.1. Γραμμικοποιημένοι όροι πηγής.

Οι χρονικοί όροι έχουν χωριστεί στα S_U και S_p και όταν επιλύεται χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο όλες οι μεταβλητές είναι εκφρασμένες στην προς επίλυση χρονική

στιγμή εκτός από τον όρο που εμφανίζεται στο S_U (εκφρασμένος στη προηγούμενη χρονική στιγμή, $n-1$) για τον οποίο απαιτείται αποθήκευση των μεταβλητών στη προηγούμενη χρονική στιγμή. Αυτή η έκφραση είναι πεπλεγμένη πρώτης τάξης ακρίβειας στο χρόνο και οδηγεί σε σταθερότητα κατά την επίλυση για αρκετά μεγάλα χρονικά βήματα. Για ρητή έκφραση με έκφραση όλων των μεταβλητών εκτός του όρου που εμφανίζεται στο S_P στη προηγούμενη χρονική στιγμή ($n-1$) θα εμφανιζόταν αλγεβρική μορφή της εξίσωσης με γραμμική λύση για το επόμενο χρονικό βήμα. Οι ρητές εκφράσεις όμως έχουν σχεδόν πάντα περιορισμούς σχετικά με το μέγεθος του χρονικού βήματος ανάλογα με την τοπική ταχύτητα και μέγεθος πλέγματος (αριθμός Courant).

Για να αποφευχθεί ασταθής συμπεριφορά στη σύγκλιση της μεθόδου μόνο όροι οι οποίοι είναι πάντα αρνητικοί πρέπει να περιληφθούν στον παράγοντα (S_P) έτσι ώστε να γίνεται πιο ισχυρή η διαγώνια μορφή του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος που επιλύεται σε κάθε επανάληψη (η τριδιαγώνια μορφή της εξίσωσης [2.2.1] εξηγείται στην παράγραφο 2.5). Οι υπόλοιπες σταθερές έχουν ήδη οριστεί στην παράγραφο 2.1. Τέλος γίνεται χρήση και ενός ακόμη όρου στους όρους πηγής ο οποίος δεν φαίνεται πιο πάνω επειδή δεν προκύπτει από τις εξισώσεις. Ο όρος αυτός έχει σταθεροποιητικό ρόλο (για τη σύγκλιση), δεν επιδρά στην τελική λύση και προκύπτει ως το γινόμενο του υπολοίπου μάζας μέσα από μία υπολογιστική κυψέλη με τη διαφορά της καινούργιας και της παλιάς τιμής της υπολογιζόμενης μεταβλητής:

[2.2.2]

$$S_+ = |\dot{m}_{\text{net}}| (\Phi_P^{\text{prev}} - \Phi_P)$$

Είναι προφανές ότι και οι δύο πολλαπλασιαζόμενες ποσότητες θα είναι μηδενικές όταν η μέθοδος θα έχει συγκλίνει.

Για την αντιπροσώπευση των όρων μεταφοράς και διάχυσης (αρ. πλευρά της εξ. [2.2.1]) γίνεται χρήση κάποιου σχήματος ανάντι παραγωγίσης, π.χ. του υβριδικού ή του BSOU. Έστω η μεταφορά ποσότητας μέσα από μία από τις τέσσερις επιφάνειες π.χ. της (A_e) η οποία βρίσκεται μεταξύ των κόμβων E και P του πλέγματος (Σχήμα 2.2.2). Η συνεισφορά στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στη πλευρά e είναι :

[2.2.3]

$$\underbrace{(\rho u)_e \Phi_e A_e}_{\text{συναγωγή}} - \underbrace{\Gamma_{\Phi,e} \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\delta x_{PE}} A_e}_{\text{διάχυση}}$$

Αν γίνεται χρήση του υβριδικού σχήματος που είναι συνδυασμός κεντρικής και ανάντι παραγωγίσης και είναι πρώτης τάξης ακρίβειας ($\mathcal{O}(\delta x)$) θα ισχύει :

[2.2.4]

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \Phi_P & \text{Pe}_e > 2 \\ \Phi_e &= f\Phi_E + (1-f)\Phi_P & -2 < \text{Pe}_e < 2 \\ \Phi_e &= \Phi_E & \text{Pe}_e < -2 \end{aligned}$$

όπου (Pe) είναι ο αριθμός Peclet στην ανατολική πλευρά (επιφάνεια) της υπολογιστικής κυψέλης και (f) είναι συντελεστής που ορίζεται από τη γεωμετρία του πλέγματος για τη γραμμική παρεμβολή:

[2.2.5]

$$\text{Pe}_e = \left(\frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\Phi} \right)_e, \quad f = \frac{\delta x_{Pe}}{\delta x_{PE}}$$

Συνήθως, όταν $|\text{Pe}| < 2$ ο όρος διάχυσης είναι αμελητέος και λαμβάνεται μόνο η συναγωγή από τις σχέσεις του υβριδικού σχήματος [2.2.4]. Με παρόμοιες εκφράσεις αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες τρεις πλευρές. Η χρήση όμως του υβριδικού σχήματος είναι δυνατόν να εμφανίσει προβλήματα αριθμητικής διάχυσης. Αριθμητική διάχυση εμφανίζεται λόγω των προσεγγιστικών λύσεων των διαφορικών εξισώσεων με πεπερασμένες διαφορές, οπότε τυχόν σφάλμα σε κάποιο σημείο του πεδίου μεταφέρεται ανεξάρτητα από το πεδίο ταχυτήτων (αριθμητικά) στους γειτονικούς κόμβους (για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το φαινόμενο αυτό βλ. “Υπολογιστική Ρευστομηχανική” του καθ. Γ. Μπεργελέ). Για την καλύτερη δε αντιμετώπιση του φαινομένου έχουν αναπτυχθεί στο εργαστήριο Αεροδυναμικής του Ε.Μ.Π. και πρωτότυπα σχήματα ανώτερης τάξης ακρίβειας όπως το BSOU. Το σχήμα BSOU (Bounded Second Order Upwind, Papadakis and Bergeles, 1995) είναι ένας συνδυασμός της ανάντι παραγωγίσης πρώτης (First Order Upwind) και δεύτερης τάξης (Second Order Upwind) και γενικά εισάγει μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με το

υβριδικό ενώ περιορίζει τα προβλήματα αριθμητικής διάχυσης. Γενικά το BSOU κάνει χρήση κάποιων μη γραμμικών συντελεστών ανάμιξης μεταξύ των δύο ανάντι παραγωγίσεων (FOU και SOU). Ορίζονται τα μεγέθη:

[2.2.6]

$$\hat{\Phi}_P = (\Phi_P - \Phi_W) / (\Phi_E - \Phi_W) \quad , \quad \gamma_e = \frac{(\Phi_E - \Phi_P) / (\Phi_P - \Phi_W)}{\Delta\xi_{Pe} / \Delta\xi_{WP}}$$

και για την επιφάνεια (e) του όγκου ολοκλήρωσης με $u_e > 0$ είναι :

[2.2.7]

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P & \hat{\Phi}_P < 0 \\ \Phi_W + (1 + \Delta\xi_{Pe} / \Delta\xi_{WP})(\Phi_P - \Phi_W) & 0 < \hat{\Phi}_P < (\Delta\xi_{WP} / \Delta\xi_{We}) \\ \Phi_W + (1 + \gamma_e \Delta\xi_{Pe} / \Delta\xi_{WP})(\Phi_P - \Phi_W) & (\Delta\xi_{WP} / \Delta\xi_{We}) < \hat{\Phi}_P < 1 \\ \Phi_P & \hat{\Phi}_P > 1 \end{cases}$$

Το σχήμα αυτό κάνει χρήση και των κόμβων που εκτείνονται πέρα από τους αμέσως γειτονικούς όγκους ολοκλήρωσης (για την περίπτωση όπου $u_e < 0$, χρειάζεται και το Φ_{WW} κ.τ.λ.) και επομένως περιπλέκει κάπως την διακριτοποίηση, όμως έχει το πλεονέκτημα της μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας ενώ σε σχέση με άλλα σχήματα ανώτερης τάξης (π.χ. QUICK) είναι επί πλέον φραγμένο.

Όταν όλοι οι όροι αντιμετωπιστούν όπως περιγράφηκε πιο πάνω (είτε με υβριδικό σχήμα ανάντι διαφόρισης είτε με το BSOU) η διακριτοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

[2.2.8]

$$(\alpha_P^\Phi - S_P^\Phi) \Phi_P = \alpha_N^\Phi \Phi_N + \alpha_S^\Phi \Phi_S + \alpha_E^\Phi \Phi_E + \alpha_W^\Phi \Phi_W + S_U^\Phi$$

$$\alpha_P^\Phi = \alpha_N^\Phi + \alpha_S^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi$$

συνδέοντας έτσι την μεταβλητή (Φ) σε κάθε σημείο με τις τιμές της στα τέσσερα γειτονικά σημεία N,S,E,W.

Οι όροι πηγής έχουν ήδη οριστεί (Πίνακας 2.2.1) ενώ οι συντελεστές α_j ($j=N,S,E,W$) προκύπτουν από την διακριτοποίηση του αριστερού μέρους των [2.2.1] και εξαρτώνται από το σχήμα διαφόρισης. Ενδεικτικά θα παρουσιαστούν μόνο ορισμένοι συντελεστές με το BSOU όπου όλοι οι όροι που σχετίζονται με τους πιο απομακρυσμένους κόμβους (WW, EE, NN, SS) προστίθενται τελικά στους όρους πηγής S_U . Έτσι θα είναι για τους συντελεστές E,W και για την συμβολή του BSOU στους όρους πηγής από την επιφάνεια (e):

[2.2.9]

$$\alpha_W = \max\left\langle 0, (\rho u \delta y)_w \right\rangle + \frac{\Gamma_{\Phi,w}}{\delta x_{WP}} \delta y_w, \quad \alpha_E = \max\left\langle 0, -(\rho u \delta y)_e \right\rangle + \frac{\Gamma_{\Phi,e}}{\delta x_{EP}} \delta y_e$$

$$S_{U,e}^{BSOU} = -\max\left\langle 0, -(\rho u \delta y)_e \frac{\delta x_{eE}}{\delta x_{E-EE}} \gamma_e \right\rangle (\Phi_{EE} - \Phi_E) + \max\left\langle 0, -(\rho u \delta y)_w \frac{\delta x_{wP}}{\delta x_{PE}} \gamma_w \right\rangle (\Phi_E - \Phi_P)$$

παρομοίως προκύπτουν και οι συντελεστές για N, S και για τις συμβολές στους όρους πηγής από τις επιφάνειες w, n, s.

Αν ληφθεί η εξίσωση κατά μήκος μίας I γραμμής τότε θεωρώντας γνωστά τα μεγέθη στην προηγούμενη και επόμενη γραμμή η [2.2.9] παίρνει τη μορφή τριδιαγώνιου συστήματος που επιλύεται με αλγόριθμο TDMA.

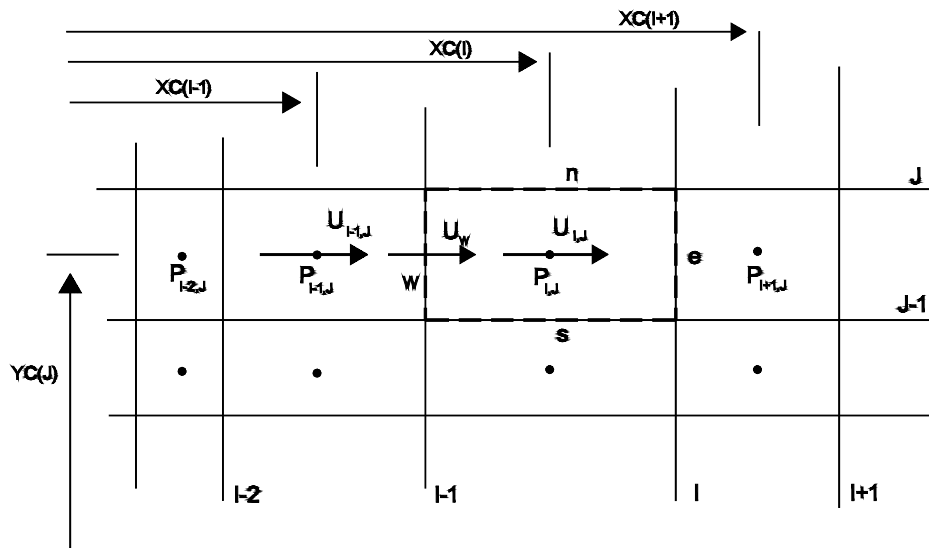
2.3 ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΙΕΣΗΣ

Ο υπολογισμός της πίεσης είναι αυτός που συγκεντρώνει το μεγαλύτερο μέρος της ιδιαιτερότητας κατά τη χρήση ομόθετου πλέγματος. Επειδή οι ταχύτητες και οι πιέσεις αποθηκεύονται στο ίδιο σημείο του πλέγματος, η πρώτη παράγωγος της πίεσης που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος των εξισώσεων ορμής για τις (u) και (v) ταχύτητες (Πίνακας 2.2.1.) θα πρέπει να εκφραστεί, π.χ. για ομοιόμορφο πλέγμα, ως:

[2.3.1]

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{(I,J)} = \frac{P(I+1,J) - P(I-1,J)}{XC(I+1) - XC(I-1)}, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(I,J)} = \frac{P(I,J+1) - P(I,J-1)}{YC(J+1) - YC(J-1)}$$

Το Σχήμα 2.3.1 δείχνει την υπολογιστική κυσέλη καθώς και τις βασικές μεταβλητές που θα εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτής της παραγράφου. Σημειώνεται ότι τα σημεία του πλέγματος που συμβολίζονταν με E , W στο Σχήμα 2.2.2 συμβολίζονται στο Σχήμα 2.3.1 με P_{IJ} και οι ανάλογοι δείκτες I, J υποδηλώνουν τις συντεταγμένες τους ως προς το πλέγμα.



Σχήμα 2.3.1. Ορισμός γεωμετρικών χαρακτηριστικών του πλέγματος και θέσεις μεταβλητών στη βασική υπολογιστική κυσέλη.

Η μορφή της [2.3.1] για τις πρώτες παραγώγους μπορεί να οδηγήσει σε ανακριβείς υπολογισμούς της κλίσης της πίεσης π.χ. κατά τη x κατεύθυνση από το $(I-1, J)$ στο $(I+1, J)$ επειδή χάνονται οι πληροφορίες από το $(I-1, J)$ στο (I, J) και από το (I, J) στο $(I+1, J)$. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι ο προκαταρκτικός υπολογισμός του πεδίου πίεσης έχει σημαντικές διακυμάνσεις και ασυνέχειες λόγω της αποσύζευξης των πιέσεων στα γειτονικά σημεία. Αυτό επηρεάζει αρνητικά και το πεδίο ταχυτήτων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί κατά τον σχηματισμό της εξίσωσης για την επίλυση της πίεσης. Έτσι η μορφή [2.3.1] επιτρέπεται στις εξισώσεις ορμής και το πρόβλημα που μόλις αναφέρθηκε αντιμετωπίζεται μόνο μέσω της εξίσωσης της πίεσης όπως αυτή θα προκύψει παρακάτω με εφαρμογή της εξίσωσης της συνέχειας.

Επειδή οι εξισώσεις ορμής επιλύονται πρώτες και εξαρτώνται από το πεδίο της πίεσης, αυτό το πεδίο θα πρέπει να θεωρηθεί αρχικά γνωστό. Η αρχική υπόθεση P^* για το

πεδίο της πίεσης δεν μπορεί φυσικά να είναι σωστή, οπότε οι ταχύτητες που προκύπτουν ικανοποιούν μεν τις εξισώσεις ορμής αλλά συνήθως δεν ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας, οδηγώντας έτσι σε κάποια υπόλοιπα μάζας. Με σκοπό τον μηδενισμό των υπολοίπων αυτών και τον υπολογισμό του νέου πεδίου πίεσης, ακολουθεί στο τέλος κάθε υπολογισμού ταχυτήτων (επίλυση εξισώσεων ορμής) μία διόρθωση για το αρχικό πεδίο πίεσης (επίλυση εξίσωσης συνέχειας). Φυσικά η διόρθωση αυτή θα επηρεάσει και το πεδίο ταχυτήτων. Συμβολίζοντας τις αρχικές τιμές με εκθέτη (*) και τις διορθώσεις με (') οι διορθωμένες τιμές πίεσης και ταχυτήτων προκύπτουν ως:

[2.3.2]

$$P(I, J) = P^*(I, J) + P'(I, J)$$

$$u(I, J) = u^*(I, J) - DU(I, J) \frac{\partial P'}{\partial x} \bigg|_{(I, J)}, \quad v(I, J) = v^*(I, J) - DV(I, J) \frac{\partial P'}{\partial y} \bigg|_{(I, J)}$$

$$DU(I, J) = \frac{Vol}{\alpha_p^u(I, J) - S_p^u(I, J)}, \quad DV(I, J) = \frac{Vol}{\alpha_p^v(I, J) - S_p^v(I, J)}$$

όπου $\alpha_p^u(I, J)$, $\alpha_p^v(I, J)$ και (Vol) έχουν ήδη οριστεί στη παράγραφο 2.2. Με τις σχέσεις της [2.3.2] είναι ευνόητο ότι για την διόρθωση έχει υποτεθεί ότι οι ταχύτητες εξαρτώνται μόνο από τις πιέσεις και έχουν παραληφθεί όλοι οι υπόλοιποι όροι από τις εξισώσεις ορμής. Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις [2.3.2] στην εξίσωση της συνέχειας ολοκληρωμένη πάνω στα όρια μιας υπολογιστικής κυψέλης:

[2.3.3]

$$-(\rho u \delta y)_e + (\rho u \delta y)_w + (\rho v \delta x)_s - (\rho v \delta x)_n = 0$$

θα προκύψει η ακόλουθη εξίσωση υπολογισμού της διόρθωσης της πίεσης:

[2.3.4]

$$-\rho_e u_e^* \delta y + \rho_w u_w^* \delta y + \rho_s v_s^* \delta x - \rho_n v_n^* \delta x +$$

$$\rho_e DU_e \delta y \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_e - \rho_w DU_w \delta y \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_w - \rho_s DV_s \delta x \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)_s + \rho_n DV_n \delta x \left(\frac{\partial P'}{\partial y} \right)_n = 0$$

Η πρώτη γραμμή της εξίσωσης αυτής αποτελεί και το υπόλοιπο μάζας που προκύπτει από τον αρχικό υπολογισμό των τιμών των ταχυτήτων (αυτό το υπόλοιπο θα μηδενιστεί όταν

έχουν βρεθεί τα σωστά πεδία). Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι στην [2.3.4] οι πρώτες παράγωγοι της διόρθωσης της πίεσης υπολογίζονται πάνω στο αντίστοιχο όριο n,s,e ή w και επομένως αποφεύγεται η ανεπιθύμητη και ανακριβής μορφή της [2.3.1]. Για το e π.χ. :

[2.3.5]

$$\left(\frac{\partial P'}{\partial x}\right)_e = \frac{P'(I+1, J) - P'(I, J)}{XC(I+1) - XC(I)}$$

Για τα υπόλοιπα μεγέθη όπως η πυκνότητα και οι συντελεστές DU και DV γίνονται απλές γραμμικές παρεμβολές με τη βοήθεια κατάλληλων συντελεστών βαρύτητας σε περίπτωση ανομοιόμορφου πλέγματος.

Οι Rhie and Chow (1983) αναφέρουν ότι τα προβλήματα που εισάγονται από την [2.3.1] στα πεδία πίεσεως και ταχυτήτων μπορούν να διορθωθούν εδώ με κατάλληλη προσέγγιση της παρεμβολής των u^* , v^* στα όρια των κυψελών. Έτσι πρότειναν κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων αυτών να μην γίνει απλή γραμμική παρεμβολή, αλλά συγχρόνως να αφαιρεθούν οι υπολογισμένες διαφορές των πιέσεων των εξισώσεων ορμής και να χρησιμοποιηθεί η διαφορά πίεσης πάνω στην εν λόγω πλευρά της κυψέλης. Παρακάτω φαίνεται η εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της ταχύτητας u_w^* στη δυτική πλευρά της υπολογιστικής κυψέλης (με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται και οι ταχύτητες στις άλλες πλευρές της κυψέλης) :

[2.3.6]

$$u_w^* = [1 - WFW(I)] \left\{ u^*(I-1, J) - DU(I-1, J) \frac{\partial P^*}{\partial x} \bigg|_{(I-1, J)} \right\} + WFW(I) \left\{ u^*(I, J) - DU(I, J) \frac{\partial P^*}{\partial x} \bigg|_{(I, J)} \right\} \\ + \left\{ [1 - WFW(I)] DU(I-1, J) + WFW(I) DU(I, J) \right\} \frac{P^*(I-1, J) - P^*(I, J)}{XC(I) - XC(I-1)}$$

όπου WFW είναι συντελεστής βαρύτητας για την γραμμική παρεμβολή υπολογισμένος με βάση την ανομοιομορφία του πλέγματος (ανάλογα υπάρχουν και WFE, WFS, WFN) ενώ τα XC ορίζονται στο Σχήμα 2.3.1. Στην [2.3.6] οι όροι που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες στην πρώτη γραμμή εκφράζουν τις ταχύτητες εκατέρωθεν της επιφάνειας (w) αλλά χωρίς την επίδραση της κλίσης πίεσης (ο όρος που αφαιρείται έχει την έκφραση της [2.3.1]). Στη συνέχεια στη τελευταία γραμμή της [2.3.6] προστίθεται η επίδραση της πίεσης στην τιμή της

ελλιπώς (ως προς επίδραση πίεσης) παρεμβληθείσας τιμής της ταχύτητας στην εν λόγω επιφάνεια. Είναι φανερό ότι η επίδραση αυτή υπολογίζεται με πολύ καλύτερη ακρίβεια. Τελικά κατά τα πρότυπα των [2.3.5] και [2.3.6] η [2.3.4] καταλήγει σε μία μορφή :

[2.3.7]

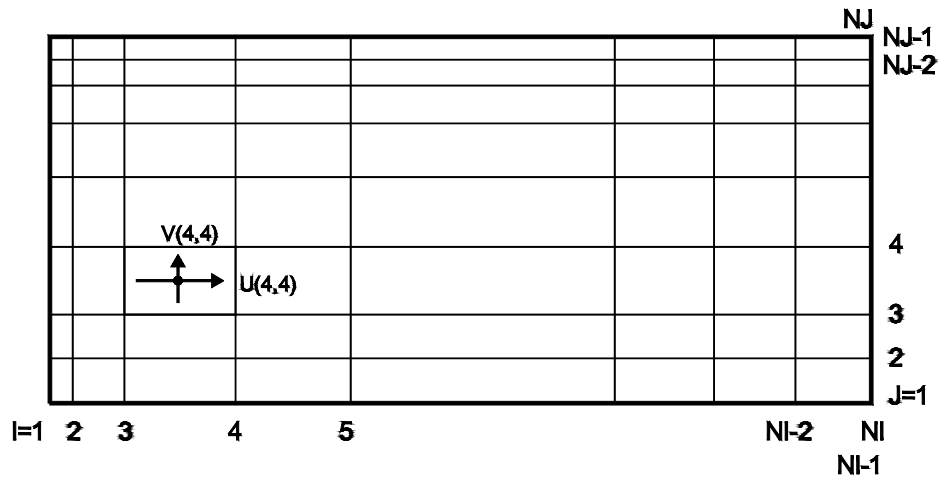
$$\alpha_p^{P'} P'_p = \alpha_N^{P'} P'_N + \alpha_S^{P'} P'_S + \alpha_E^{P'} P'_E + \alpha_W^{P'} P'_W + S_U^{P'}$$

$$\alpha_p^{P'} = \alpha_N^{P'} + \alpha_S^{P'} + \alpha_E^{P'} + \alpha_W^{P'} , S_U^{P'} = -\rho_e u_e^* \delta y + \rho_w u_w^* \delta y + \rho_s v_s^* \delta x - \rho_n v_n^* \delta x$$

η οποία είναι ίδια με την μορφή της [2.2.8] και καταλήγει σε επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος. Ο όρος πηγής S_U είναι η πρώτη γραμμή της [2.3.4], δηλαδή το υπόλοιπο μάζας για τον όγκο αναφοράς. Στο εξής η [2.3.4] ή η [2.3.7] θα αναφέρεται ως “εξίσωση της πίεσης”. Τέλος σημειώνεται ότι οι όροι της εξίσωσης [2.3.3] είναι ίδιοι ακριβώς με ένα μέρος των συντελεστών των $\Phi_{N,S,E,W}$ της εξίσωσης [2.2.1] ή [2.2.8]. Αυτό είναι λογικό διότι πρόκειται για τους όρους συναγωγής οι οποίοι είναι και αυτοί που εμφανίζονται στην εξίσωση της συνέχειας. Το γεγονός αυτό μπορεί να εκμεταλλευτεί προγραμματιστικά.

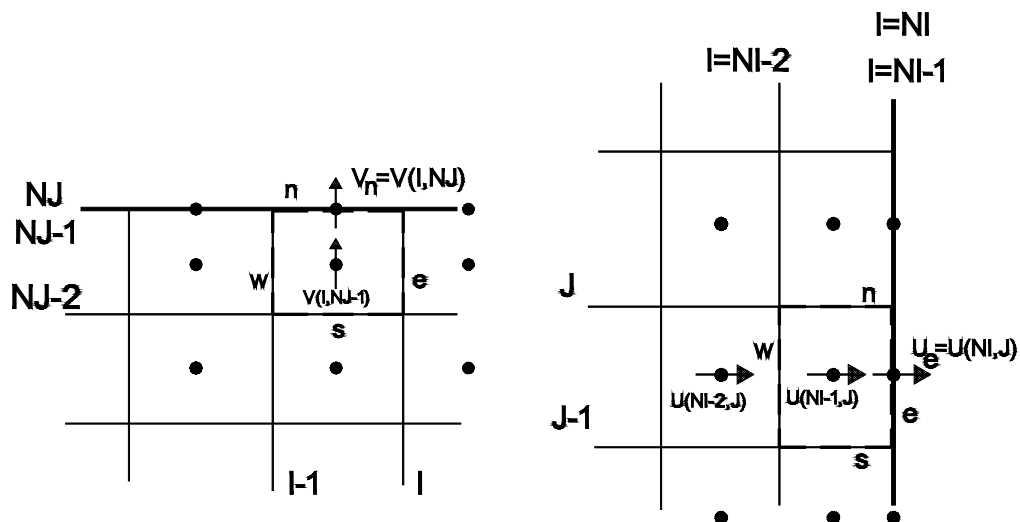
2.3.1 Αντιμετώπιση στα όρια του υπολογιστικού χώρου

Το υπολογιστικό πλέγμα, λαμβάνοντας υπ' όψη τις ιδιαιτερότητες αποθήκευσης που έχουν μέχρι τώρα αναφερθεί, φαίνεται στο Σχήμα 2.3.2. Παρατηρείται μία επί πλέον ιδιαιτερότητα στην αρίθμηση των πλεγματικών γραμμών στα όρια. Με μία προσεκτικότερη ματιά θα δει ο αναγνώστης ότι, εφόσον οι μεταβλητές αποθηκεύονται στα μέσα των πλεγματικών κυψελών, ο αριθμός των μεταβλητών σε μία πλεγματική κατεύθυνση θα είναι κατά ένα μεγαλύτερος από τον αριθμό των πλεγματικών γραμμών που τέμνουν κάθετα την κατεύθυνση αυτή. Αυτό οδηγεί τις οριακές τιμές των μεταβλητών σε αποθήκευση ακριβώς πάνω στις οριακές γραμμές. Έτσι η μεταβλητή $U(NI-1,J)$ θα αποθηκεύεται μεταξύ τελευταίας (NI-1) και προτελευταίας (NI-2) πλεγματικής γραμμής ενώ η $U(NI,J)$ θα αποθηκεύεται ακριβώς πάνω στην τελευταία γραμμή (NI-1). Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 2.3.3 για την ακτινική ταχύτητα στο βόρειο όριο.



Σχήμα 2.3.2. Αρίθμηση πλεγματοικών γραμμών.

Σε όλα τα όρια του υπολογιστικού χώρου δεν γίνεται διαφορετική χρήση των παρεμβολών που περιγράφηκαν στην παράγραφο για την εξίσωση της πίεσης αλλά αυτές συμπεριφέρονται σωστά χάρη στην ειδική μορφή της υπολογιστικής κυψέλης που γειτονεύει με το όριο. Δίνεται παρακάτω ένα παράδειγμα για το βόρειο και ανατολικό όριο του υπολογιστικού χώρου (τα άλλα όρια αντιμετωπίζονται με ακριβώς ανάλογο τρόπο) :



Σχήμα 2.3.3. Αποθήκευση ταχυτήτων σε βόρειο και ανατολικό όριο του υπολογιστικού χώρου.

Για το βόρειο όριο στο Σχήμα 2.3.3, οι ταχύτητες στις πλευρές e, w, s υπολογίζονται με τις παρεμβολές που περιγράφηκαν στην παράγραφο 2.3 ενώ για την πλευρά (n) ο

υπολογισμός βασίζεται στο γεγονός ότι το πάνω όριο χαρακτηρίζεται από μία υπολογιστική κυψέλη μηδενικού πάχους κατά την J κατεύθυνση οπότε στο όριο αυτό οι τιμές των μεγεθών θα αποθηκεύονται ακριβώς πάνω στην γραμμή NJ και επομένως ακριβώς πάνω στο όριο. Οι παρεμβολές με τους συντελεστές βαρύτητας ($WFN(NJ-1)=0$) οδηγούν στον υπολογισμό της ταχύτητας (V_n) ίσης με την $V(I,NJ)$ του ορίου (υπολογίζεται όπως στην [2.3.6]). Για την περίπτωση όμως όπου υπάρχουν στερεά όρια στο εσωτερικό του πλέγματος (όχι στις οριακές γραμμές $I=1$ ή NI , $J=1$, NJ) θα πρέπει να μηδενίζονται οι ταχύτητες αυτές με ειδικό τρόπο αφού οι παρεμβολές δεν θα επιφέρουν από μόνες τους το επιθυμητό αποτέλεσμα.

2.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Μέχρι στιγμής, η μόνη αναφορά που έχει γίνει στις οριακές συνθήκες ήταν ο τρόπος που λειτουργούν οι ειδικές παρεμβολές της εξίσωσης της πίεσης κοντά στα όρια. Όμως, είναι αναγκαία και η τροποποίηση των σχημάτων πεπερασμένων διαφορών για τα σημεία του πλέγματος που είναι κοντά σε κάποιο όριο, είτε αυτό είναι στερεό τοίχωμα, είτε άξονας συμμετρίας κ.τ.λ. Από την [2.2.1] και την [2.2.3] είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι η ολοκλήρωση σε όγκους αναφοράς έχει δώσει για κάθε επιφάνεια του όγκου αναφοράς έναν όρο μεταφοράς ορμής (συναγωγής) και έναν όρο διάχυσης. Ανάλογα με το είδος του ορίου, αυτοί οι όροι θα πρέπει να τροποποιούνται.

Έστω για παράδειγμα η υπολογιστική κυψέλη στο Σχήμα 2.3.3, που βρίσκεται δίπλα στο βόρειο σύνορο. Αν το βόρειο σύνορο είναι αδιαπέραστο τοίχωμα ή άξονας συμμετρίας τότε δεν θα υπάρχει μεταφορά ορμής κάθετα στο τοίχωμα και επομένως ο όρος συναγωγής μέσα από την επιφάνεια αυτή θα είναι μηδενικός. Αυτό όμως, δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και για τον όρο διάχυσης ο οποίος, εφ' όσον είναι μη μηδενικός, θα τεθεί στην επιθυμητή τιμή και θα μεταφερθεί στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης [2.2.1] ως ένας πρόσθετος όρος ψευδοπηγής. Γενικά για ένα σύνορο $j=N,S,E,W$ η αντιμετώπιση είναι η εξής:

Θέτουμε κατ' αρχήν:

[2.4.1]

$$\alpha_j^\Phi = 0$$

το οποίο ουσιαστικά μηδενίζει ολόκληρο τον όρο [2.2.3], δηλαδή την μεταφορά ορμής αλλά και τη διάχυση κάθετα στη j επιφάνεια του όγκου ολοκλήρωσης. Με μόνο την εφαρμογή της [2.4.1] επιτυγχάνεται η επιβολή συνθηκών Neumann που είναι μηδενική κλίση της μεταβλητής στην κατεύθυνση κάθετα στην επιφάνεια. Υπενθυμίζεται όμως ότι έχει μηδενιστεί και η μεταφορά ορμής κάθετα στην επιφάνεια κάτι που μπορεί να μην είναι πάντα επιθυμητό όταν θέλουμε οριακή συνθήκη Neumann.

Στη περίπτωση που η διάχυση είναι μη μηδενική ή οι όροι συναγωγής και διάχυσης παίρνουν κάποια ειδική μορφή, θα πρέπει, σε συνδυασμό με την [2.4.1], να προστεθούν κάποιοι όροι στις εκφράσεις των γραμμικοποιημένων όρων πηγής (S_U και S_P) στο δεξιό μέρος της [2.2.1]. Μερικές τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζονται παρακάτω.

- Έστω για παράδειγμα ότι για ένα στερεό τοίχωμα σε βόρεια κατεύθυνση (στο $J+1$, σε αρίθμηση πλέγματος) είναι γνωστή η θερμοκρασία στην επιφάνειά του (T_n) ή ότι κινείται με κάποια ταχύτητα (U_n). Προφανώς δεν θα υπάρχει μεταφορά ορμής κάθετα στο στερεό ($V_n=0$) οπότε μένει ο όρος διάχυσης ο οποίος δεν μηδενίζεται :

[2.4.2]

$$\underbrace{(\rho v)_n \Phi_n A_n}_{=0} - \Gamma_{\Phi,n} \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\delta y_{NP}} A_n$$

όπου εδώ θα είναι $A_n = \delta x_n$ ενώ η κλίση της μεταβλητής Φ θα ορίζεται από το $P \rightarrow n$ αντί για το $P \rightarrow N$ αφού το όριο είναι στο n . Μετά την εφαρμογή της [2.4.1] λοιπόν θα πρέπει να καθοριστεί και η διάχυση σύμφωνα με την τιμή της μεταβλητής πάνω στο όριο (Φ_n) (οριακή συνθήκη Dirichlet) και ο όρος που μένει στην [2.4.2] χωρίζεται στα δύο και προστίθεται στους όρους πηγής:

[2.4.3]

$$S_U^\Phi = S_U^\Phi + \alpha'_N \Phi_n \quad S_P^\Phi = S_P^\Phi - \alpha'_N$$

$$\alpha'_N = (\Gamma_\Phi)_n \frac{1}{\delta y_{Pn}} \delta x_n$$

- Αν είναι απαραίτητο να οριστεί η τιμή της μεταβλητής στο κέντρο της υπολογιστικής κυψέλης (Φ_P) σε κάποια τιμή (Φ_F) (όχι η τιμή πάνω στο όριο όπως προηγουμένως) τότε οι αλλαγές είναι :

[2.4.4]

$$S_U^\Phi = \Phi_F 10^{30} \quad , \quad S_P^\Phi = -10^{30}$$

έτσι ώστε αυτοί οι όροι να κυριαρχούν στην εξίσωση [2.2.1] και, λόγω ταυτότητας, να δώσουν $\Phi_P = \Phi_F$.

- Αν η ταχύτητα η κάθετη στο όριο είναι μηδενική (στερεό όριο ή άξονας συμμετρίας) αλλά είναι δεδομένη η τιμή του όρου διάχυσης στο σύνορο (π.χ. για την επίλυση της θερμοκρασίας ο όρος διάχυσης εκφράζει την σταθερή παροχή θερμότητας (Q'') που μπορεί να έχει επιβληθεί στο τοίχωμα, π.χ. για $j=N$: $\Gamma_T \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{Q''}{C_p}$) τότε ο όρος αυτός προστίθεται στο S_U το οποίο τελικά γίνεται:

[2.4.5]

$$S_U^T = S_U^T - \frac{Q''/C_p}{Vol}$$

Φυσικά η [2.4.5] εφαρμόζεται και για τις άλλες μεταβλητές αν χρειαστεί με το (Q''/C_p) να αποτελεί τον όρο της διάχυσης για την ανάλογη μεταβλητή.

- Αν το υπό εξέταση όριο είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να υπάρχει μεταφορά ορμής κάθετα σ' αυτό και να έχουμε οριακή συνθήκη εισχώρισης (π.χ. ελεύθερο όριο πάνω από οριζόντια πλάκα όπου η ανάπτυξη του οριακού στρώματος θα “σπρώχνει” ρευστό στην κάθετη στη πλάκα κατεύθυνση) τότε δεν εφαρμόζεται η [2.4.1] αλλά θέτονται οι ταχύτητες πάνω στο

όριο ίσες με τις τιμές που υπάρχουν στα αμέσως γειτονικά κελιά. Στην ουσία δηλαδή είναι συνθήκη Neumann αλλά χωρίς τον μηδενισμό της κάθετης στο όριο ταχύτητας. Προσοχή θέλει εδώ ώστε να παρακολουθείται η εισερχόμενη-εξερχόμενη μάζα ρευστού από όλα τα όρια και να γίνεται ισολογισμός του με διόρθωση των οριακών τιμών των ταχυτήτων έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνολική διατήρηση παροχής μάζας ρευστού.

Οι ταχύτητες που είναι παράλληλες σε κάποιο συνοριακό τοίχωμα συνήθως έχουν οριακή συνθήκη όπου η ταχύτητα είναι δεδομένη ή όπου η διατμητική τάση ($\tau_B = \mu \partial u_i / \partial n$) είναι δεδομένη ή όπου (τ_B) είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας. Οι συνθήκες αυτές λαμβάνονται ανάλογα με την [2.4.3] όπου ο όρος διάχυσης μεταφέρεται στο δεξιό μέλος της εξίσωσης και προστίθεται στους όρους πηγής. Αναλυτικότερη αναφορά σε αυτές τις οριακές συνθήκες γίνεται στην επόμενη παράγραφο. Οι ταχύτητες οι κάθετες σε κάποιο τοίχωμα θα πρέπει να είναι μηδενικές πάνω στο τοίχωμα, όμως αυτό μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα στον υπολογισμό της κλίσης της μεταβλητής κατά την κάθετη στο τοίχωμα διεύθυνση. Έτσι για το σημείο του πλέγματος που γειτονεύει με το τοίχωμα εφαρμόζεται επί πλέον και οριακή συνθήκη Neumann μηδενικής κάθετης κλίσης (εφαρμογή της [2.4.1]). Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται και τα υπόλοιπα συνοριακά σημεία.

Οι οριακές συνθήκες που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι Dirichlet για όλες τις μεταβλητές στην είσοδο του πεδίου και Neumann για όλες τις μεταβλητές στην έξοδο. Η (V) ταχύτητα μπορεί να τίθεται και μηδέν στην έξοδο, εφ'όσον το όριο είναι τέτοιο που να επιτρέπει την θεώρηση πλήρως ανεπτυγμένης ροής. Η (U) ταχύτητα στην έξοδο υφίσταται κάποιον ισολογισμό μάζας ως προς την είσοδο και διορθώνεται αναλόγως σε κάθε επανάληψη. Στον άξονα συμμετρίας θεωρείται Neumann συνθήκη εκτός των ταχυτήτων που είναι κάθετες στο όριο οι οποίες θεωρούνται μηδενικές. Τέλος η πίεση επιλύεται με Neumann συνθήκες παντού εκτός της εισόδου όπου θεωρείται μηδενική (πίεση αναφοράς). Υπενθυμίζεται ότι η μεθοδολογία λύνει σχετικές πιέσεις και επομένως θα μπορούσε να τεθεί οποιαδήποτε τιμή για την πίεση στην είσοδο χωρίς καμία επίδραση στην λύση αφού οι κλίσεις πίεσης θα μείνουν ούτως ή άλλως ανεπηρέαστες.

2.4.1 Οριακές συνθήκες ταχυτήτων παράλληλων σε τοίχωμα, συναρτήσεις τοιχώματος (wall functions).

Στη τυρβώδη ροή, για την αποφυγή λεπτομερών υπολογισμών στις περιοχές κοντά στα τοιχώματα όπου θα απαιτείτο ένας μεγάλος αριθμός πλεγματικών γραμμών, γίνεται μία ειδική θεώρηση για την εξάρτηση των ταχυτήτων, της τυρβώδους κινητικής ενέργειας και του ρυθμού καταστροφής της κοντά στο τοίχωμα με την απόσταση του υπολογιζόμενου σημείου από το τοίχωμα. Οι σχέσεις που ακολουθούν έχουν προκύψει από τις πειραματικά μετρημένες διανομές των μεγεθών σε τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα. Σύμφωνα με τις μετρήσεις, οι διανομές μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από δύο περιοχές, μία πολύ κοντά στο τοίχωμα η οποία είναι γραμμικού χαρακτήρα και μία πιο μακριά η οποία ακολουθεί λογαριθμικό κανόνα. Αυτές οι εξισώσεις έχουν τη βασική πρακτική σημασία να επιτρέπουν τον σωστό υπολογισμό των κλίσεων των μεγεθών και άρα των όρων διάχυσης δίπλα σε στερεά όρια σε τυρβώδη ροή.

Για βόρειο σύνορο, στο οποίο είναι παράλληλη η (U) ταχύτητα, έχουμε για την διατμητική τάση πάνω στο τοίχωμα ($\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$) :

[2.4.6]

$$\tau_w = \mu_{l,p} \frac{u_p}{\delta y_p} \quad y^+ < 11.63$$

$$\tau_w = \left[\frac{\rho C_\mu^{1/4} \kappa \sqrt{k}}{\ln(Ey^+)} \right]_p u_p \quad y^+ > 11.63$$

Για δυτικό σύνορο παράλληλη θα είναι η (v) οπότε η διατμητική τάση δίνεται και πάλι από την [2.4.6] μόνο που αντί για u_p θα είναι v_p . Γενικότερα, το (κ) είναι η σταθερά του Von Karman (=0.4187) ενώ (E) είναι γενικά συνάρτηση της τραχύτητας του τοιχώματος και συνήθως θεωρούμε λείο τοίχωμα οπότε είναι $E=9.793$. Επίσης, (y^+) είναι η αδιάστατη κάθετη απόσταση του σημείου P του πλέγματος του πλέον γειτονικού στο στερεό όριο (Σχήμα 2.4.1), όπου υπολογίζουμε την ταχύτητα, από το τοίχωμα:

[2.4.7]

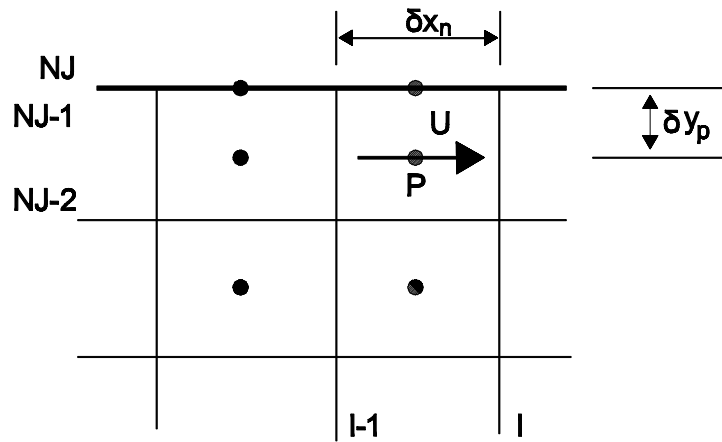
$$y_p^+ = \left(\frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k}}{v} \right)_p \delta y_p$$

Η εισαγωγή των συναρτήσεων τοιχώματος γίνεται κατά τον τρόπο που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και είναι (π.χ. για βόρειο σύνορο, n) :

[2.4.8]

$$S_P^u = S_P^u - \frac{\tau_w}{u_P} \delta x_n$$

όπου φυσικά θα πρέπει να είναι και $\alpha_N=0$.



Σχήμα 2.4.1. Θέσεις μεταβλητών για βόρειο τοίχωμα

Ο όρος μπαίνει στο S_P λόγω της γραμμικοποίησης που έχουν υποστεί οι όροι πηγής στην [2.2.1] αφού και η [2.4.6] είναι συνάρτηση της προς επίλυση μεταβλητής στο σημείο P. Στην ειδικότερη περίπτωση όπου το στερεό όριο κινείται με ταχύτητα ($u_{\text{τοιχ.}}$) θα πρέπει στην [2.4.8] να μπει η σχετική ταχύτητα $u_P = u_P - u_{\text{τοιχ.}}$.

Σημειώνεται ότι οι σχέσεις αυτές εφαρμόζονται και κατά τον υπολογισμό του (G) (Πίνακας 2.1.1) κοντά σε τοιχώματα ενώ για τον όρο (-ρε) που εμφανίζεται στους όρους πηγής εφαρμόζεται η εξής σχέση :

[2.4.9]

$$\int_V \rho \varepsilon dV = \begin{cases} \left(\rho C_\mu^{3/4} k^{3/2} \frac{y^+}{\delta y} \right)_P \text{Vol} & y^+ < 11.63 \\ \left(\rho C_\mu^{3/4} k^{3/2} \frac{\ln(Ey^+)}{\kappa \delta y} \right)_P \text{Vol} & y^+ > 11.63 \end{cases}$$

ο οποίος εισάγεται στο S_P σε αντικατάσταση της συνηθισμένης σχέσης (Πίνακας 2.2.1) (υπενθυμίζεται ότι για να εισαχθεί στο S_P το οποίο ενσωματώνεται στο a_P θα πρέπει, λόγω της γραμμικοποίησης, το $k^{3/2}$ των [2.4.9] να γραφεί $k^{1/2}$ ως όρος του S_P).

Για την τυρβώδη κινητική ενέργεια (k) εφαρμόζονται Neumann συνθήκες κοντά σε τοιχώματα (οπότε αρκεί το $a_j=0$) ενώ για το ρυθμό καταστροφής (ε) ισχύει η σχέση:

[2.4.10]

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_P}$$

και εισάγεται προγραμματιστικά ως :

[2.4.11]

$$S_U^\varepsilon = 10^{30} \left(\frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \right)_P \quad S_P^\varepsilon = -10^{30}$$

οπότε η τιμή του (ε) είναι δεδομένη σε σημεία P κοντά σε τοιχώματα.

2.4.2 Περίληψη των οριακών συνθηκών

Οι οριακές συνθήκες για όλες τις μεταβλητές περιγράφονται ως εξής:

(α) Οι μεταβλητές στην είσοδο ορίζονται άμεσα και αλλάζονται εύκολα για το κάθε πρόβλημα. Ιδιαιτερότητα παρουσιάσει μόνο η (V) ταχύτητα που δίνεται πάντα μηδενική

καθώς και η πίεση η οποία επίσης δίνεται μηδενική (για να υπολογιστούν οι σχετικές πιέσεις ως προς την τιμή στην είσοδο).

(β) Οι μεταβλητές στην έξοδο ακολουθούν οριακές συνθήκες Neumann εκτός της (V) ταχύτητας η οποία μπορεί και να τεθεί μηδέν. Η (U) ταχύτητα υφίσταται ισολογισμό για τη διατήρηση της παροχής μάζας με βάση την εισερχόμενη και εξερχόμενη μάζα ρευστού από όλα τα υπόλοιπα όρια. Αυτό γίνεται προσθέτοντας, σε κάθε επανάληψη, έναν υπολογιζόμενο όρο στις αμέσως προηγούμενες της εξόδου τιμές, έτσι οι $U(NI,J)$ προκύπτουν από τις $U(NI-1,J)$ αφού προστεθεί μία ποσότητα που θα προκύψει από την διατήρηση-ισολογισμό μάζας

(γ) Οι μεταβλητές στον άξονα συμμετρίας ακολουθούν Neumann οριακές συνθήκες εκτός της κάθετης ταχύτητας η οποία είναι μηδενική επί του άξονα.

(δ) Σε βόρειο τοίχωμα η πίεση και η (V) ταχύτητα επιδέχονται Neumann οριακές συνθήκες όπως και η (k). Για τη (U) ταχύτητα παράλληλη σε τοίχωμα εφαρμόζονται οι συναρτήσεις τοιχώματος. Για την (ε) εφαρμόζονται οι [2.4.9] και [2.4.11].

(ε) Σε ανατολικό ή δυτικό τοίχωμα έχουμε Neumann συνθήκες για τη πίεση και τη (k) καθώς και για τη (U) ταχύτητα. Οι συνθήκες τοιχώματος εφαρμόζονται για την (V) ταχύτητα που είναι παράλληλη στο τοίχωμα ενώ για την (ε) ισχύουν και πάλι τα της παραγράφου 2.4.1.

2.5 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η διαδικασία επίλυσης έχει ήδη περιγραφεί συνοπτικά αλλά εδώ θα γίνει πιο αναλυτική περιγραφή για τις εξισώσεις που χρησιμοποιούνται και για τον τρόπο που επιλύονται.

- 1) Γίνεται μία αρχική υπόθεση για όλες τις μεταβλητές σε όλο το πεδίο ροής. Σ' αυτό το στάδιο βοηθάει πολύ η ύπαρξη προηγούμενων υπολογισμών για παρόμοια προβλήματα οπότε και οι λύσεις αυτές θεωρούνται ως αρχικές τιμές για την υπολογιζόμενη. Μαζί με τις αρχικές τιμές είναι προφανές ότι υποτίθεται και μία αρχική τιμή για το πεδίο πίεσης.
- 2) Λύνονται οι εξισώσεις ορμής για την αξονική και ακτινική ταχύτητα (βλ. παράγραφο 2.2).
- 3) Λύνεται η εξίσωση της πίεσης [2.3.4] όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.3 για να βρεθεί το διορθωμένο πεδίο της πίεσης που θα ικανοποιεί και την εξίσωση της συνέχειας.
- 4) Γίνονται οι διορθώσεις στην πίεση και στις ταχύτητες σύμφωνα με την [2.3.2].

- 5) Λύνονται ξανά οι εξισώσεις της παραγράφου 2.2 τώρα για τις υπόλοιπες μεταβλητές ($\Phi=k, \varepsilon, T \dots$).
- 6) Οι νέες τιμές που έχουν βρεθεί για τα πεδία όλων των μεταβλητών θεωρούνται ως νέες βελτιωμένες αρχικές τιμές και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τη σύγκλιση.
- 7) Σε περίπτωση που η επίλυση γίνεται σε μη μόνιμη ροή (χρονική εξέλιξη του φαινομένου) η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται σε κάθε χρονικό βήμα. Όταν έχει επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση τότε η λύση δεν θα αλλάζει από χρονικό βήμα σε χρονικό βήμα.

Κατά την επίλυση όλων των εξισώσεων, εφαρμόζεται η μέθοδος TDMA για την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος συντεταγμένων με τη μέθοδο εναλλαγής κατεύθυνσης. Θεωρούνται λοιπόν ως άγνωστες οι τιμές της προς επίλυση μεταβλητής κατά μία πλεγματική γραμμή. Φυσικά όπως φαίνεται και από την [2.2.8] οι μεταβλητές αυτές θα εξαρτώνται και από τις αντίστοιχες στην προηγούμενη και επόμενη πλεγματική γραμμή. Αυτές λαμβάνονται ίσες με τις πιο πρόσφατα υπολογισμένες τιμές τους. Κατ'αυτό τον τρόπο βρίσκονται οι νέες τιμές της μεταβλητής κατά μήκος πλεγματικών γραμμών σε μία κατεύθυνση. Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η επίλυση και στην άλλη κατεύθυνση. Σημειώνεται ότι το σύστημα που επιλύεται σε κάθε γραμμή πλέγματος αποτελείται από όλα τα εσωτερικά σημεία του πεδίου πάνω στη γραμμή αυτή.

Σε κάθε επανάληψη είναι απαραίτητη η εφαρμογή υποχαλάρωσης κατά την επίλυση των εξισώσεων. Ετσι, μόνο ένα ποσοστό της τιμής μίας μεταβλητής που υπολογίστηκε χρησιμοποιείται για αρχική τιμή της επόμενης επανάληψης. Το υπόλοιπο μέρος της τιμής αυτής λαμβάνεται από την προηγούμενη επανάληψη :

[2.5.1]

$$\Phi_p^{νεα} = \omega \tilde{\Phi}_p + (1 - \omega) \Phi_p^{προηγ.}$$

όπου με (\sim) συμβολίζεται η νέα υπολογισθείσα τιμή πριν εφαρμοστεί η υποχαλάρωση, ενώ οι εκθέτες συμβολίζουν την επανάληψη στην οποία αναφέρονται οι μεταβλητές. Η μεταβλητή (ω) είναι η παράμετρος υποχαλάρωσης και παίρνει τιμές $0 \leq \omega \leq 1$. Όμως η πρακτική εφαρμογή της υποχαλάρωσης την έχει ενσωματώσει στη διαδικασία επίλυσης κάνοντας τις εξής μεταβολές στους συντελεστές της εξίσωσης [2.2.8] :

[2.5.2]

$$\frac{(\alpha_p^\Phi - S_p^\Phi)}{\omega} \Phi_p^{\text{new}} = \alpha_N^\Phi \Phi_N^{\text{old}} + \alpha_S^\Phi \Phi_S^{\text{old}} + \alpha_E^\Phi \Phi_E^{\text{old}} + \alpha_W^\Phi \Phi_W^{\text{old}} + S_U^\Phi + (1 - \omega) \frac{(\alpha_p^\Phi - S_p^\Phi)}{\omega} \Phi_p^{\text{old}}$$

$$\alpha_p^\Phi = \alpha_N^\Phi + \alpha_S^\Phi + \alpha_E^\Phi + \alpha_W^\Phi$$

Η επίδραση της παραμέτρου υποχαλάρωσης επιδρά στη σύγκλιση κάνοντάς την πολύ αργή αν η παράμετρος είναι πολύ μικρή ή ακόμη και οδηγώντας τη λύση σε απόκλιση για πολύ μεγάλη τιμή υποχαλάρωσης. Η τελική σύγκλιση επιτυγχάνεται όταν τα υπόλοιπα που μένουν στις εξισώσεις γίνουν μικρότερα από κάποια συγκεκριμένη τιμή. Τα υπόλοιπα αυτά ορίζονται για κάθε μεταβλητή σε κάθε σημείο του πλέγματος ως εξής:

[2.5.3]

$$R_p^\Phi = (\alpha_p^\Phi - S_p^\Phi) \Phi_p - \alpha_N^\Phi \Phi_N - \alpha_S^\Phi \Phi_S - \alpha_E^\Phi \Phi_E - \alpha_W^\Phi \Phi_W - S_U^\Phi$$

Η ελάχιστη τιμή κάτω από την οποία το πρόβλημα θεωρείται ότι έχει συγκλίνει συνήθως είναι 0.1% του ρυθμού εισόδου της αντίστοιχης μεταβλητής (π.χ. για τις ταχύτητες θεωρείται η ροή εισόδου της ορμής). Έτσι όταν το άθροισμα των υπολοίπων της [2.5.3] για όλα τα σημεία του πλέγματος είναι μικρότερο από την τιμή αυτή για όλες τις μεταβλητές (άλλο υπόλοιπο για κάθε μεταβλητή) θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει συγκλίνει.

Σημειώνεται εδώ ότι η ενσωμάτωση των συντελεστών υποχαλάρωσης στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος εισάγει κάποια εξάρτηση της εξίσωσης της πίεσης από την υποχαλάρωση. Αυτό είναι εύκολο να φανεί μιας και από την [2.5.2] είναι φανερό ότι ο συντελεστής υποχαλάρωσης εισάγεται (και αποθηκεύεται υπολογιστικά) στον συντελεστή a_p της κάθε μεταβλητής, αυτός ο συντελεστής με την σειρά του εισάγεται στην διόρθωση της πίεσης και στην εξίσωση της συνέχειας (ταχύτητες) μέσω των [2.3.2], [2.3.4] και [2.3.6]. Το αποτέλεσμα είναι ότι σε οριακές τιμές του συντελεστή υποχαλάρωσης (μικρότερο από 0.3) υπάρχει περίπτωση τα αποτελέσματα του συγκλιμένου πεδίου να είναι διαφορετικά ανάλογα με την τιμή του συντελεστή υποχαλάρωσης. Το πρόβλημα αυτό διορθώνεται αφ' ενός προσαρμόζοντας την [2.3.6] και αφ' ετέρου εισάγοντας μία διόρθωση για τις ταχύτητες στις επιφάνειες των όγκων (Majumdar, 1988, Miller and Schmidt, 1988). Έτσι η [2.3.6] προσαρμόζεται στην :

[2.5.4]

$$\begin{aligned}
u_w^* = & [1 - WFW(I)] \left\{ u^*(I-1, J) - DU(I-1, J) \frac{\partial P^*}{\partial x} \bigg|_{(I-1, J)} \right\} + WFW(I) \left\{ u^*(I, J) - DU(I, J) \frac{\partial P^*}{\partial x} \bigg|_{(I, J)} \right\} + \\
& \{ [1 - WFW(I)] DU(I-1, J) + WFW(I) DU(I, J) \} \frac{P^*(I-1, J) - P^*(I, J)}{XC(I) - XC(I-1)} + \\
& (1 - \omega) \{ u_w^{*, \text{προηγ.}} - [1 - WFW(I)] u^*(I-1, J) - WFW(I) u^*(I, J) \}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία γραμμή εισάγει την ανεξαρτησία από τον συντελεστή υποχαλάρωσης με το κόστος της επί πλέον αποθήκευσης των επιφανειακών ταχυτήτων της προηγούμενης επανάληψης $u_w^{*, \text{προηγ.}}$. Απαιτείται όμως τώρα και η διόρθωση των ταχυτήτων αυτών με την διόρθωση πίεσης που μόλις υπολογίστηκε:

[2.5.5]

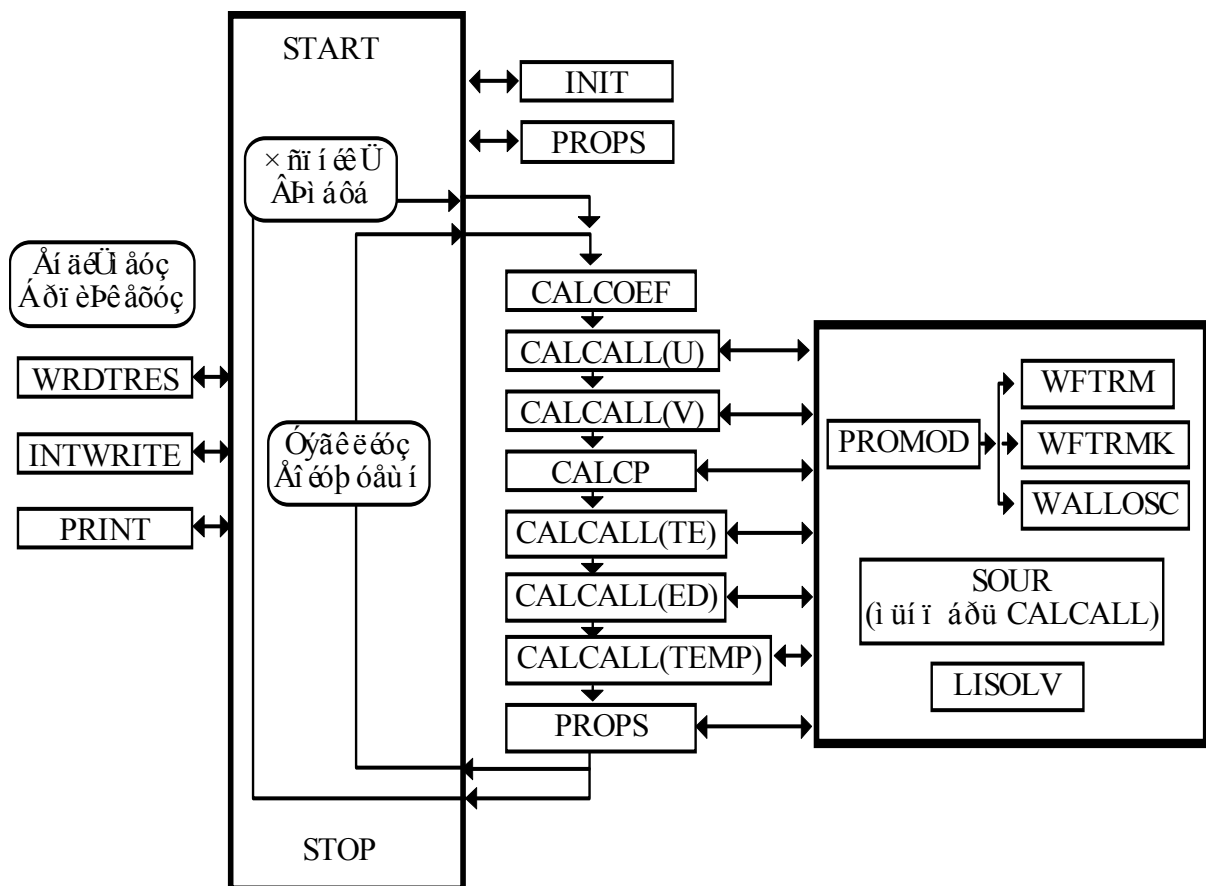
$$u_w = u_w^* + \{ [1 - WFW(I)] DU(I-1, J) + WFW(I) DU(I, J) \} \frac{P'(I-1, J) - P'(I, J)}{XC(I) - XC(I-1)}$$

Οι ταχύτητες που προκύπτουν για τις επιφάνειες του όγκου ολοκλήρωσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στις [2.2.3] (αυτό δεν έχει να κάνει όμως με τη μέθοδο της ανάντι παραγωγής, είναι μόνο για τις ταχύτητες και όχι για την προς επίλυση μεταβλητή).

3. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ Η./Υ.

3.1 ΒΑΣΙΚΗ ΔΟΜΗ

Η μεθοδολογία που περιγράφηκε στη προηγούμενη ενότητα μεταφέρεται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN. Αναλυτική παρουσίαση του προγράμματος θα ακολουθήσει σ' αυτήν την παράγραφο με περιγραφή των υπορουτινών και των λειτουργιών τους καθώς και με επεξήγηση των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται. Ακολουθεί λογικό διάγραμμα του προγράμματος καθώς και ανάλυση της κάθε υπορουτίνας που εμφανίζεται σε αυτό.



Λογικό διάγραμμα προγράμματος CAFFCA

MAIN: Στο κύριο μέρος του προγράμματος γίνεται η κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος και η ανάθεση των αρχικών συνθηκών στις περισσότερες μεταβλητές. Στη συνέχεια ξεκινούν δύο επαναληπτικές διαδικασίες. Η πρώτη είναι για την χρονική εξέλιξη του φαινομένου ενώ η δεύτερη γίνεται σε κάθε επανάληψη της πρώτης (κάθε χρονικό βήμα) και αφορά στις απαιτούμενες επαναλήψεις για τη σύγκλιση των εξισώσεων. Σ'αυτή την "δεύτερη" επαναληπτική διαδικασία γίνεται και ο κυρίως υπολογισμός καλώντας τις κατάλληλες υπολογιστικές υπορουτίνες (CALCOEF, CALCALL, CALCP) οπότε, για κάθε χρονικό βήμα, βάσει των ελέγχων σύγκλισης, επιτυγχάνεται η λύση για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν η επίλυση γίνεται για χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο ροής, τότε γίνεται έλεγχος για τη διαφορά της λύσης από την προηγούμενη χρονική στιγμή και, αν δεν έχει φτάσει το πρόβλημα σε κατάσταση μονιμότητας, προχωρά η λύση και στο επόμενο χρονικό βήμα. Φυσικά μόλις επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση γίνεται και η αποθήκευση των τελικών αποτελεσμάτων.

INIT: Η υπορουτίνα αυτή είναι η πρώτη που καλείται από το κυρίως πρόγραμμα και έχει σκοπό, μόλις γίνει η κατασκευή του υπολογιστικού πλέγματος, να οριστούν κάποια γεωμετρικά μεγέθη του υπολογιστικού κώδικα που είναι απαραίτητα για τους υπολογισμούς. Στη συνέχεια μηδενίζονται όλες οι μεταβλητές ή ανατίθενται οι κατάλληλες τιμές στις σταθερές.

PROPS: Εδώ γίνεται ο υπολογισμός της τιμής της τυρβώδους συνεκτικότητας ανάλογα με τις τιμές των υπολοίπων μεταβλητών του πεδίου. Προφανώς σε περίπτωση στρωτών ροών η υπορουτίνα αυτή καλείται μόνο μία φορά και όχι σε κάθε επανάληψη αφού τα μεγέθη που υπολογίζονται σ'αυτήν θα παραμένουν σταθερά. Σε περίπτωση μη ισόθερμων ροών, εδώ μπορεί να γίνεται ο υπολογισμός των νέων τιμών της πυκνότητας συναρτήσει της θερμοκρασίας από την καταστατική εξίσωση των αερίων (η μεταβολή της πυκνότητας συναρτήσει της θερμοκρασίας δεν έχει συμπεριληφθεί στη παρούσα μορφή του κώδικα).

CALCOEF: Στην υπορουτίνα αυτή γίνονται οι υπολογισμοί των συντελεστών διάχυσης οι οποίοι είναι οι ίδιοι για όλες τις μεταβλητές που επιλύονται με βάση την εξίσωση [2.2.1] ή [2.2.8]. Η CALCOEF καλείται μόνο μία φορά στην αρχή της κάθε επανάληψης μιας και οι αλλαγές στους όρους διάχυσης προκύπτουν μόνο από την αλλαγή στην τιμή της

συνεκτικότητας η οποία γίνεται από το μοντέλο τύρβης στο τέλος κάθε επανάληψης. Οι συντελεστές συναγωγής που εμφανίζονται στην [2.2.1] υπολογίζονται στην CALCP όπου εφαρμόζονται και οι ειδικές παρεμβολές για τις επιφάνειες των κυψελών.

CALL: Στην υπορουτίνα αυτή γίνεται υπολογισμός των συντελεστών της [2.2.8] και συγχρόνως εφαρμόζεται το υβριδικό ή το BSOU σχήμα ανάντι διαφόρισης, η υπορουτίνα καλεί στη συνέχεια την PROMOD όπου λαμβάνονται οι οριακές συνθήκες καθώς και οι όροι πηγής της [2.2.8] οπότε τελικά επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων για την εκάστοτε μεταβλητή μέσω της LISOLV. Σημειώνεται ότι αυτή η ίδια υπορουτίνα καλείται για την επίλυση όλων των μεταβλητών και η διαφοροποίηση των εξισώσεων ανάλογα με την μεταβλητή γίνεται μέσω των οριακών συνθηκών και των όρων πηγής που υπολογίζονται στην PROMOD. Η μόνη άλλη διαφοροποίηση γίνεται στους συντελεστές διάχυσης μέσω των συντελεστών (σ) της [2.1.3].

CALCP: Η υπορουτίνα αυτή έχει σκοπό τον υπολογισμό της διόρθωσης της πίεσης μέσω της εφαρμογής της εξίσωσης της συνέχειας. Για τον υπολογισμό εφαρμόζονται όλες οι παρεμβολές που περιγράφηκαν στην παράγραφο 2.3 και επιλύεται η εξίσωση με την LISOLV. Με τα αποτελέσματα για την διόρθωση της πίεσης γίνεται διόρθωση των ταχυτήτων και της πίεσης ώστε να συνεχίσουν οι υπολογισμοί στην επόμενη επανάληψη. Οι συντελεστές συναγωγής που υπολογίζονται για την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης χρησιμοποιούνται και για την εξίσωση [2.2.1] των υπολοίπων μεταβλητών.

PRINT, NPRINT: Οι υπορουτίνες αυτές έχουν σκοπό την παρουσίαση των τιμών μιας μεταβλητής (πραγματικής και ακέραιας αντίστοιχα) σε όλο το πεδίο κατά παραστατικό τρόπο έτσι ώστε να λαμβάνεται μία πρώτη εικόνα της λύσης χωρίς παραπέρα διαχείριση των αποτελεσμάτων.

INTWRITE, WRDTRES: Οι υπορουτίνες αυτές λειτουργούν για την ενδιάμεση αποθήκευση μεταβλητών κατά τη λειτουργία του προγράμματος. Η INTWRITE αποθηκεύει όλες τις απαραίτητες μεταβλητές έτσι ώστε να μπορεί να γίνει επανεκκίνηση του προγράμματος από την επανάληψη στην οποία έγινε η αποθήκευση (π.χ. μπορεί να γίνεται αποθήκευση μεταβλητών κάθε 100 επαναλήψεις). Αυτό εξοικονομεί χρόνο υπολογισμού σε περίπτωση που, για οποιονδήποτε λόγο σταματήσει το πρόγραμμα. Η WRDTRES καλείται

ενδιάμεσα των χρονικών βημάτων και επομένως σε χρονικά μεταβαλλόμενα πεδία εδώ μπορεί να γίνεται καταγραφή της χρονικής εξέλιξης των μεταβλητών. Η μορφή του κώδικα που παρέχεται δίνει τη δυνατότητα στον χρήστη να καθορίσει τα χρονικά βήματα (μέχρι και 500) στα οποία θα αποθηκευτεί ολόκληρο το πεδίο (ανάλογα με την INTWRITE, αλλά σε διαφορετικά αρχεία για κάθε χρονικό βήμα).

LISOLV: Η υπορουτίνα αυτή καλείται από τις CALCALL και CALCP για την εφαρμογή της μεθοδολογίας επίλυσης τριδιαγώνιου συστήματος με εναλλαγή κατευθύνσεων (TDMA). Σε κάθε κάθετη γραμμή από αριστερά προς τα δεξιά λύνεται ένα τριδιαγώνιο σύστημα στο οποίο οι τιμές της επιλύμενης μεταβλητής της επόμενης και της προηγούμενης κάθετης πλεγματικής γραμμής θεωρούνται γνωστές από τον πιο πρόσφατο υπολογισμό τους. Έτσι έχουμε άγνωστες τις τιμές της μεταβλητής που ανήκουν στην ίδια κάθετη πλεγματική γραμμή και οι οποίες αποτελούν το τριδιαγώνιο σύστημα που θα επιλυθεί. Αφού γίνει ο υπολογισμός σε όλο το πεδίο γίνεται η εναλλαγή κατεύθυνσης και υπολογίζονται τώρα τα τριδιαγώνια συστήματα που ορίζονται από τις οριζόντιες γραμμές. Η υπορουτίνα εκτελείται διαδοχικά για έναν αριθμό επαναληπτικών σαρώσεων ώστε να συγκλίνουν οι λύσεις των συστημάτων (συνήθως 3-5 σαρώσεις είναι αρκετές).

PROMOD: Η υπορουτίνα αυτή καλείται από τις PROPS, CALCALL και CALCP για να εφαρμοστούν οι οριακές συνθήκες για την κάθε μεταβλητή, σε κάθε όριο του πεδίου. Επίσης εδώ γίνεται ο υπολογισμός των όρων πηγής οι οποίοι εμφανίζονται στις [2.2.1]. Είναι προφανές ότι ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα εδώ υπάρχουν οι περισσότερες μεταβολές ώστε να ληφθούν υπ'όψη οι οριακές συνθήκες.

SOUR: Αυτή η υπορουτίνα σχετίζεται με τον υπολογισμό επί πλέον όρων για το BSOU σχήμα ανάντι διαφόρισης και καλείται από την CALCALL.

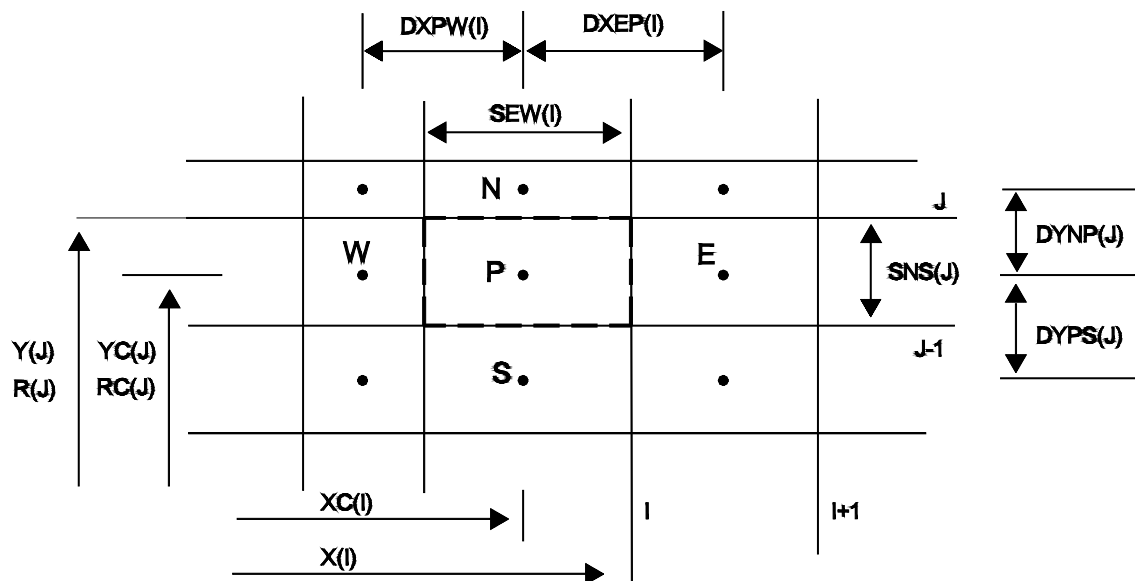
WFTRM, WFTRMK: Οι δύο αυτές συναρτήσεις (FUNCTION) επιστρέφουν τους όρους των συναρτήσεων τοιχώματος [2.4.6] και [2.4.9] για την εφαρμογή των ανάλογων οριακών συνθηκών και καλούνται από την PROMOD.

WALLOSC: Η συνάρτηση αυτή επιστρέφει την συνημιτονοειδή μεταβολή ενός μεγέθους με δεδομένη συχνότητα και συναρτήσει του χρόνου που προχωρά η επίλυση. Π.χ. $WALLOSC(U_0, f, t) = U_0 \cos(2\pi f t)$.

Οι βασικές μεταβλητές που επιλύονται έχουν τους εξής συμβολισμούς:

Ταχύτητες (u, v , m/sec) :	$U(I, J), V(I, J)$
Πίεση (P , N/m ²) και διόρθωση πίεσης (P' , N/m ²) :	$P(I, J), PP(I, J)$
Τυρβώδης κινητική ενέργεια ανά μονάδα μάζας (k , m ² /sec ²):	$TE(I, J)$
Ρυθμός καταστροφής της k ανά μονάδα μάζας (ϵ , m ² /sec ³):	$ED(I, J)$
Θερμοκρασία (T , °K) :	$TEMP(I, J)$
Πυκνότητα (ρ , kg/m ³) :	$DEN(I, J)$
Συνεκτικότητα ($\mu_t + \mu_l$, kg/m sec) :	$VIS(I, J)$

Επίσης, οι βασικές μεταβλητές που ορίζουν την γεωμετρία του πλέγματος δίνονται στο Σχήμα 3.1.1. Οι περισσότερες από αυτές ορίζονται στην υπορουτίνα INIT. Στην επόμενη παράγραφο θα δοθεί ο τρόπος με τον οποίο εισάγονται τα δεδομένα στο πρόγραμμα και θα επεξηγηθούν όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται στη φάση αυτή.



Σχήμα 3.1.1. Μεταβλητές που ορίζονται από το υπολογιστικό πλέγμα.

3.2 ΠΑΡΟΧΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ

Σε συνοδευτική δισκέτα δίνεται το πρόγραμμα FORTRAN καθώς και τα αρχεία εισόδου δεδομένων για όλους τους υπολογισμούς που θα παρουσιαστούν στην επόμενη παράγραφο. Σκοπός του παρόντος άλλωστε δεν είναι η απλή εφαρμογή περιπτώσεων των οποίων η λύση έχει ήδη δοθεί αλλά ο αναγνώστης να σκεφτεί παραλλαγές των περιπτώσεων αυτών ή και εντελώς διαφορετικά προβλήματα και να προσαρμόσει τον κώδικα στην επίλυσή τους. Με τον στόχο αυτό κατά νου θα πρέπει τουλάχιστο να έχει κατανοήσει την σημασία των δεδομένων εισόδου και τον τρόπο κατασκευής του υπολογιστικού πλέγματος. Αυτά θα περιγραφούν εδώ. Τονίζεται εδώ αυτό το οποίο έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή, η εφαρμογή του κώδικα δεν προϋποθέτει την εμβάθυνση στη μεθοδολογία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 2. Για την επίλυση όμως πιο σύνθετων προβλημάτων είναι πολύ πιθανό να χρειαστεί επέμβαση πέρα από την απλή εισαγωγή δεδομένων, κάτι τέτοιο είναι, προφανώς, αδύνατο χωρίς την κατανόηση της μεθοδολογίας. Συνίσταται λοιπόν τουλάχιστο η ανάγνωση του 2^{ου} κεφαλαίου πριν την φάση εφαρμογής του κώδικα.

Τα αρχεία που απαρτίζουν τον κώδικα είναι:

CAFFCA.FOR	βασικό αρχείο προγράμματος σε γλώσσα FORTRAN.
CAF.INC	αρχείο FORTRAN με COMMON BLOCKS. Εδώ εισάγεται και το μέγεθος του υπολογιστικού πλέγματος.
CTINPUT	αρχείο εισόδου δεδομένων.
DATAIN.FOR	πρόγραμμα για την ευκολότερη εισαγωγή δεδομένων στον κώδικα.

Κατά την λειτουργία του κώδικα παράγονται διάφορα αρχεία τα οποία είναι:

INTFLD	αποθηκεύονται όλες οι μεταβλητές του πεδίου που είναι απαραίτητες για την επανεκκίνηση του προγράμματος (η αποθήκευση γίνεται από την υπορουτίνα INTWRITE). Η αποθήκευση γίνεται είτε ενδιάμεσα των επαναλήψεων, είτε στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, είτε κατά τον τερματισμό του κώδικα. Το αρχείο αυτό για λόγους ταχύτητας και χώρου αποθήκευσης είναι σε δυαδική μορφή (ACCESS=DIRECT) και το μέγεθός του εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο υπολογιστικό πλέγμα. Για τον λόγο αυτό, κατά την εφαρμογή του κώδικα θα πρέπει
---------------	--

να είναι συμβατό το αρχείο INTFLD το οποίο υπάρχει στον υποκατάλογο με την εφαρμογή η οποία εκτελείται.. Συνιστάται κατά την πρώτη εκκίνηση του προγράμματος σε κάποια εφαρμογή να μην υπάρχει αυτό το αρχείο στον υποκατάλογο, δημιουργείται άλλωστε αυτόματα από το πρόγραμμα.

RATECONV καταγράφονται τα υπόλοιπα της κάθε εξίσωσης (u , v , P , k , ε , T) σε κάθε επανάληψη για να έχει ο χρήστης εποπτεία των ρυθμών σύγκλισης.

RES καταγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά της επιλυόμενης ροής, τα υπόλοιπα των εξισώσεων στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, τα y^+ των επάνω και κάτω τοιχωμάτων (ενδεικτικά, για τυρβώδη ροή) ενώ εδώ είναι που τυπώνει και η PRINT και NPRINT τις τιμές των μεταβλητών σε όλο το πεδίο.

GRID Οι συντεταγμένες των πλεγματικών γραμμών και οι τιμές που χαρακτηρίζουν το κάθε σημείο ως οριακό ή εσωτερικό (μεταβλητή IWALL(I,J) που θα επεξηγηθεί παρακάτω).

DT1.DAT, DT2.DAT κ.τ.λ. αντίγραφα του INTFLD στο τέλος των χρονικών βημάτων 1, 2 κ.τ.λ. Χρησιμοποιούν στην καταγραφή αποτελεσμάτων χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων ροής (η αποθήκευση γίνεται από την υπορουτίνα WRDTRES)

Για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων χρησιμοποιείται το **DATAOUT.FOR**. Το πρόγραμμα αυτό διαβάζει το INTFLD και δίνει τη δυνατότητα να εξάγονται διανομές των μεταβλητών σε διάφορες θέσεις του πεδίου, ισογραμμές μεταβλητών, γραμμές ροής, διανύσματα ταχυτήτων κ.τ.λ. Για τα αποτελέσματα των DT1.DAT κ.τ.λ. των διαφόρων χρονικών βημάτων θα πρέπει να δίνονται τα αντίστοιχα ονόματά τους κατά την εκτέλεση του DATAOUT. Τις διανομές και τα δεδομένα για ισογραμμές τα εξάγει σε μορφή στηλών εύκολα αναγνώσιμων από προγράμματα γραφικών όπως π.χ. το GRAPHER και το SURFER για WINDOWS.

Έχει γίνει προσπάθεια ώστε η μορφή του κώδικα να είναι αρκετά απλή και να μην χρειάζεται ιδιαίτερη προσπάθεια για την διαμόρφωσή του προς επίλυση κάποιας συγκεκριμένης περίπτωσης. Ίσως το μόνο σημείο στο οποίο χρειάζεται μια ιδιαίτερη επεξήγηση είναι η κατασκευή του αριθμητικού πλέγματος. Ως προς την διαδικασία αυτή τονίζεται ότι η σωστή χωρική διακριτοποίηση έχει μεγάλη επίδραση στην ποιότητα των αποτελεσμάτων. Γενικά ένα πυκνό πλέγμα είναι επιθυμητό σε περιοχές της ροής όπου αναμένεται απότομη τοπική διαφοροποίηση των μεταβλητών όπως π.χ. κοντά σε τοιχώματα, μέσα σε περιοχές ανακυκλοφορίας κ.τ.λ. Η πυκνότητα του πλέγματος ελέγχεται αφ' ενός με

τον συνολικό αριθμό των αριθμητικών κόμβων (καθορίζεται στο **CAF.INC** από τις **NI**, **NJ** όπου δίνεται και η μεγαλύτερη εκ των δύο, **NIJMX**) και αφ'ετέρου, τοπικά, με την χρήση συντελεστών γεωμετρικής προόδου για την διανομή των πλεγματικών γραμμών σε κάποιες περιοχές της γεωμετρίας.

Για την παροχή δεδομένων σχετικά με την προς επίλυση γεωμετρία δίνονται κατ'αρχήν τα όρια του υπολογιστικού χώρου. Τα όρια αυτά δίνονται από τη μέγιστη διάσταση στη X κατεύθυνση (**XTOT**) και τη μέγιστη διάσταση στη Y κατεύθυνση (**YTOT**). Ο αριθμός των πλεγματικών γραμμών σε αυτές τις διαστάσεις ορίζεται στο **CAF.INC** ως οι τιμές των **NI** και **NJ** αντιστοίχως.

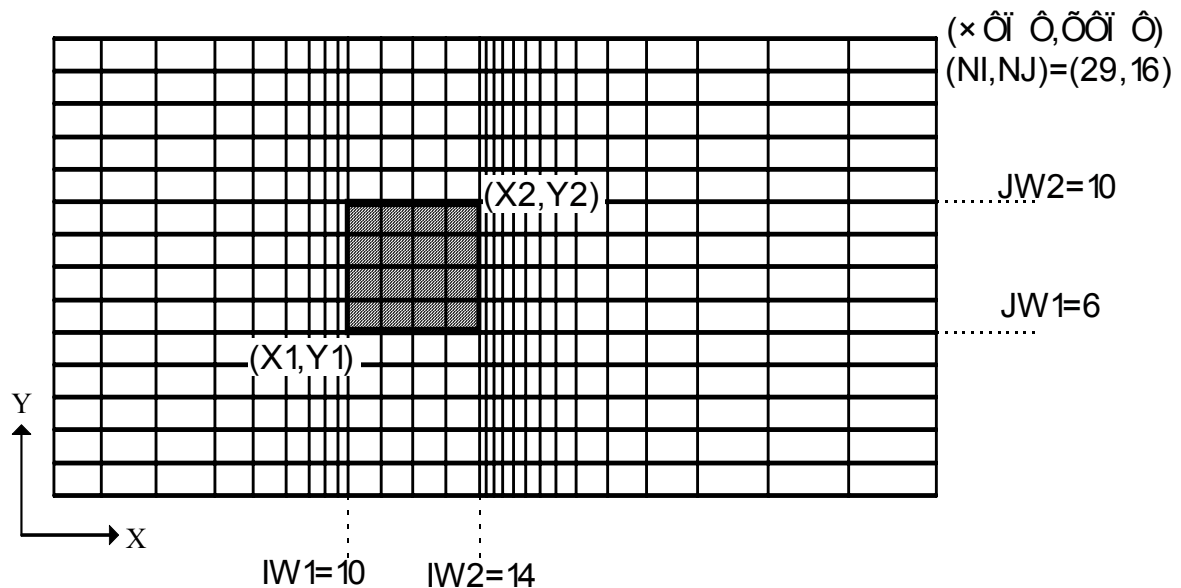
Βασική διευκόλυνση στην περιγραφή της προς επίλυση γεωμετρίας είναι η δυνατότητα ορισμού ενός ορθογωνικού χωρίου μέσα στον υπολογιστικό χώρο, για τυχόν ύπαρξη στερεού ορίου. Ο ορισμός γίνεται μέσω των δύο γωνιών του χωρίου όπου δίνονται οι συντεταγμένες τους (**X1,Y1** για την κάτω αριστερή γωνία και **X2,Y2** για την πάνω δεξιά γωνία) και η πλεγματική γραμμή στην οποία βρίσκονται (**IW1,JW1** και **IW2,JW2**). Αυτό θα φανεί πιο καθαρά με τα δύο παραδείγματα που θα ακολουθήσουν. Τέλος στην διανομή των πλεγματικών γραμμών στα σημεία ενδιαφέροντος δίνονται και οι συντελεστές γεωμετρικής προόδου για την X και Y κατεύθυνση. Ο **EXPX** δίνει την διανομή πριν και μετά το στερεό όριο (κατά συμμετρικό τρόπο, μετά το όριο ισχύει ο **1/EXPX**), ενώ ο **EXPXW** δίνει την διανομή μέσα στο στερεό όριο. Αντίστοιχα στην άλλη κατεύθυνση ισχύουν οι **EXPY** και **EXPYW**.

Τέλος, ανάλογα με το είδος του ορίου που θέλουμε, θα πρέπει να τεθεί και ανάλογη τιμή στις μεταβλητές **IBOUNDN**, **IBOUNDS**, **IBOUNDE**, **IBOUNDW** για το βόρειο, νότιο, ανατολικό και δυτικό όριο αντίστοιχα. Στις μεταβλητές αυτές η τιμή 1 σημαίνει ότι πρόκειται για στερεό τοίχωμα οπότε, για στρωτή ροή ισχύουν οι συνθήκες μη ολίσθησης και μη εισχώρησης για τις ταχύτητες και η συνθήκη σταθερής θερμοκρασίας ή αδιαβατικού τοιχώματος για την θερμοκρασία. Για τυρβώδη ροή αντιστοιχούν οι συναρτήσεις τοιχώματος. Η τιμή 2 υποδηλώνει άξονα συμμετρίας με μηδενική κάθετη ταχύτητα και μηδενική κλίση για όλα τα άλλα μεγέθη. Η τιμή 3 σημαίνει ότι πρόκειται για όριο από το οποίο μπορεί να βγαίνει ρευστό όπως π.χ. η έξοδος της ροής, ή όριο από το οποίο μπεινοβγαίνει ρευστό αλλά δεν ισχύει για την είσοδο του υπολογιστικού χώρου. Στη συνθήκη αυτή γίνεται και ο ισολογισμός της παροχής και θα πρέπει να θυμάται ο χρήστης ότι ο ισολογισμός γίνεται στο βόρειο όριο για την κατεύθυνση Y και στο ανατολικό όριο για την κατεύθυνση X. Τέλος η τιμή 4 σημαίνει ότι έχουμε στερεό όριο κινούμενο παράλληλα στην κατεύθυνσή του. Το ορθογωνικό χωρίο που ορίστηκε στην αρχή (από τα **X1,Y1** **X2,Y2**) θεωρείται ότι είναι πάντα στερεό. Επίσης σημειώνεται ότι για την είσοδο του υπολογιστικού

χώρου στην οποία μπορούν να δοθούν και συγκεκριμένες διανομές των μεταβλητών θα πρέπει να είναι πάντα $IBOUNDW=0$ και αυτή να βρίσκεται στη γραμμή $I=1$. Οι τιμές αυτές ανατίθενται στην μεταβλητή $IWALL(I,J)$ μέσα στον κώδικα η οποία αυτόματα εξασφαλίζει και την σωστή οριακή συνθήκη, δεν χρειάζεται καμία παραπέρα μέριμνα για την επιβολή των οριακών συνθηκών. ($IWALL(I,J)=0$ σημαίνει ότι στο σημείο αυτό επιλύονται κανονικά οι εξισώσεις χωρίς τροποποίηση για την παρουσία κάποιου ορίου).

Ακολουθούν δύο παραδείγματα ορισμού του υπολογιστικού χώρου. Το πρώτο έχει να κάνει με την ροή γύρω από μία τετραγωνικής διατομής ράβδο και το δεύτερο με τη ροή πάνω από ένα σκαλοπάτι. Προσοχή στο γεγονός ότι τα NI, NJ είναι κατά 1 μεγαλύτερα από τον αριθμό των πλεγματικών γραμμών επειδή οι δύο τελευταίες γραμμές σε κάθε κατεύθυνση συμπίπτουν ($X(NI)=X(NI-1)$, $Y(NJ)=Y(NJ-1)$).

A) Ροή γύρω από τετραγωνικής διατομής ράβδο με εισερχόμενη ροή από αριστερά, έξοδο από δεξιά και άξονες συμμετρίας πάνω και κάτω.



Επιβάλλονται:

CAF.INC: I=29, NJ=16, NIJMX=29

CTINPUT:XTOT=13, YTOT=7

$(X1, Y1) = (4, 2.5)$, $(X2, Y2) = (6, 4.5)$

$(IW1, JW1) = (10, 6)$, $(IW2, JW2) = (14, 10)$

IBOUNDE=0, IBOUNDW=3, IBOUNDN=2, IBOUNDS=2

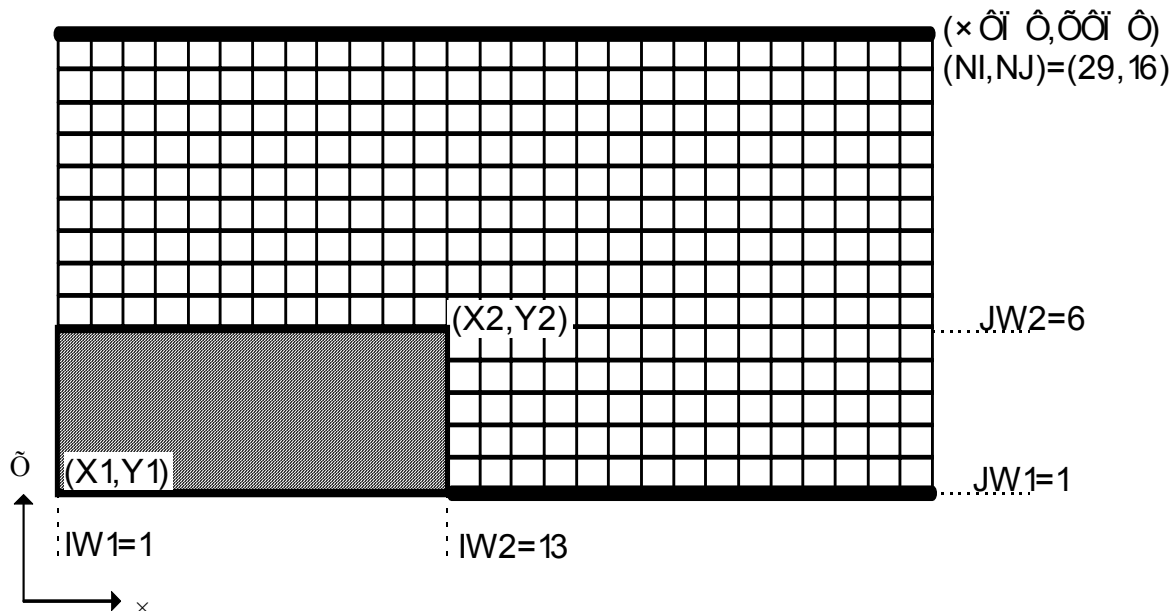
EXPY=EXPYW=1.00001 (Ομοιόμορφο πλέγμα, η τιμή 1.0 πρέπει να αποφεύγεται)

EXPX=0.97, EXPXW=1.00001

Σημειώνεται ότι το πλέγμα που φαίνεται παραπάνω δόθηκε για κατανόηση των μεταβλητών, στη πραγματικότητα τέτοιες διανομές δεν θα πρέπει να θεωρούνται αποδεκτές για να υπολογιστεί το ακριβές πεδίο ταχυτήτων. Η πυκνωση κοντά στα τοιχώματα είναι σωστή για τη X κατεύθυνση αλλά θα πρέπει να συνοδεύεται και από αντίστοιχη πυκνωση στη Y κατεύθυνση. Αντίστοιχα χρειάζεται πυκνότερο πλέγμα μέσα στη ράβδο ώστε να μην μεταβαίνει απότομα το πλέγμα από μικρή διάσταση κελιών σε μεγάλη (όπως π.χ. στα κελιά από το IW1 στο IW1+1). Γενικά θα πρέπει τα γειτονικά πλεγματικά κελιά να μην έχουν απότομες διαφορές στις διαστάσεις τους αλλά και ο λόγος των δύο διαστάσεων ενός κελιού

να είναι όσο το δυνατόν κοντινότερος στη μονάδα (λόγοι της τάξης του 100 μπορεί να οδηγήσουν σε μη σύγκλιση της μεθοδολογίας)

B) Ροή πάνω από ορθογωνικό σκαλοπάτι με είσοδο από αριστερά, έξοδο από δεξιά και στερεά τοιχώματα πάνω και κάτω.



Επιβάλλονται:

CAF.INC: I=29, NJ=16, NIJMX=29

CTINPUT:XTOT=13, YTOT=7

$(X1, Y1) = (0, 0), \quad (X2, Y2) = (5.5, 2.5)$

$(IW1, JW1) = (1, 1), \quad (IW2, JW2) = (13, 6)$

IBOUNDE=0, IBOUNDW=3, IBOUNDN=1, IBOUNDS=1

EXPY=EXPYW=1.00001 (Ομοιόμορφο πλέγμα, η τιμή 1.0 πρέπει να αποφεύγεται)

EXPX=EXPXW=1.00001

Σε περίπτωση μόνιμης ροής αρκεί ο χρήστης να θέσει το χρονικό βήμα ίσο με έναν πολύ μεγάλο αριθμό. π.χ. $\Delta t = 1.E+30$. Η τιμή αυτή θα μηδενίσει οποιαδήποτε συμβολή των χρονικών όρων των εξισώσεων (δτ είναι στον παρανομαστή, Πίνακας 2.2.1) ώστε να έχουμε τις γνωστές μας εξισώσεις για μόνιμα πεδία ροής.

Για την παροχή δεδομένων εισόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί το πρόγραμμα **DATIN.FOR** το οποίο παρέχει και κάποια επεξήγηση της κάθε μεταβλητής και δημιουργεί

τελικά το αρχείο **CTINPUT**. Μετά την απόκτηση εμπειρίας μπορεί κανείς να επεμβαίνει απ'ευθείας στο **CTINPUT**. Αναλυτικά οι μεταβλητές που εμφανίζονται στο αρχείο αυτό εξηγούνται στη συνέχεια.

Μεταβλητές που εμφανίζονται στο αρχείο εισόδου δεδομένων **CTINPUT**

0	INDCOS	Καρτεσιανές (1) ή αξονοσυμμετρικές ($\neq 1$) συντεταγμένες
1	JW1	Πλεγματικές γραμμές που ορίζουν το τετράγωνο όριο στο εσωτερικό του χώρου
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000	Y1	Συντεταγμένες των γωνιών του τετραγωνικού ορίου στο εσωτερικό του χώρου (m)
0.000000	Y2	
0.000000	X1	
0.000000	X2	
0.100000	YTOT	Μέγιστη διάσταση του χώρου κατά Y (m)
4.000000	XTOT	Μέγιστη διάσταση του χώρου κατά X (m)
1.0001	EXPY	Συντελεστής γεωμετρικής προόδου από το J=1 ως το J=JW1. Από το JW2 ως το NJ είναι το 1/EXPY
1.0001	EXPYW	Συντελεστής γεωμετρικής προόδου από το J=JW1 ως το J=JW2.
1.0001	EXPX	Συντελεστής γεωμετρικής προόδου από το I=1 ως το I=IW1. Από το IW2 ως το NI είναι το 1/EXPX
1.0001	EXPXW	Συντελεστής γεωμετρικής προόδου από το I=IW1 ως το I=IW2.
1	IBOUNDN	Καθορισμός του είδους των οριακών συνθηκών στα όρια I=1,NI και J=1,NJ 1: στερεό, 2: αξ. συμμετρίας, 3: έξοδος 4: κινούμενο στερεό όριο
2	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	T: True, F: False Για υπολογισμό της αντίστοιχης μεταβλητής
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	U,V: ταχύτητες, P: πίεση, K,D: k και ε PRO: ενεργός συνεκτικότητα ($\mu_t + \mu_b$) BSOU: χρήση BSOU αντί για υβριδικό. T: θερμοκρασία, CON: συγκέντρωση
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.031000	UIN	Μέση ταχύτητα εισόδου (m/sec)
323.0000	TWN	Θερμοκρασίες ορίων N,S,W,E (K)
323.0000	TWS	

0.000000	TWE	
300.000000	TWW	
0.100000	RLENGTH	Χαρακτηριστικό μήκος της γεωμετρίας (m) (χρησιμοποιεί κυρίως για υπολογισμό του αριθμού Reynolds και για αδιαστατοποίηση)
0.161400E+01	DENSITY	Πυκνότητα ρευστού (kg/m ³)
0.184600E-04	VISCOSITY	Δυναμική συνεκτικότητα ρευστού (kg/msec)
0.707000	PRANDTL NUMBER	Αριθμός Prandtl του ρευστού ($Pr = \mu C_p / \lambda$)
0.100700E+04	CP	Ειδική θερμοχωρητικότητα (J/mK)
0.100000E+30	TIME STEP	Χρονικό βήμα (sec)
2000	MAXIT	Όριο επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα στο οποίο τερματίζεται η λειτουργία του προγράμματος.
20000	MXTIMIT	Όριο επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα στο οποίο η επίλυση περνά στο επόμενο χρονικό βήμα (χωρίς προηγούμενη σύγκλιση).
20000	MXITSTP	Όριο επαναλήψεων ανά χρονικό βήμα κάτω από το οποίο όταν επιτευχθεί σύγκλιση θεωρείται ότι έχει επέλθει μόνιμη κατάσταση και τερματίζεται το πρόγραμμα.
0.500000E+36	TMAX	Όριο χρόνου στο οποίο τερματίζεται το πρόγραμμα (sec)
0.000000	SOURCE TERM VALUE	Όρος πηγής όταν επιλύεται η συγκέντρωση (ταυτίζεται με την επίλυση της εξ. Θερμοκρασίας)
0.500000	URFU	Συντελεστές υποχαλάρωσης για την σύγκλιση των εξισώσεων U,V: ταχύτητες, P: πίεση K,D: k και ε, T: θερμοκρασία VIS: ενεργός συνεκτικότητα ($\mu_t + \mu_l$)
0.500000	URFV	
0.300000	URFP	
1.000000	URFK	
1.000000	URFD	
0.500000	URFT	
1.000000	URFVIS	
0.500000E-02	SORMAX	Όριο υπολοίπων των εξισώσεων για U,V,P και T κάτω από το οποίο θεωρείται ότι η λύση έχει συγκλίνει
50000	INDPRI	Αριθμός επαναλήψεων στον οποίο θα τυπώνεται η λύση όλου του πεδίου στο αρχείο RES. Στον τερματισμό του προγράμματος γίνεται ούτως ή άλλως.
0	KINTRM	≠0: διαβάζει προηγούμενη λύση από το INTFLD, 0: αρχίζει επίλυση από αυθαίρετο πεδίο.
100	ISAVE	Αριθμός επαναλήψεων για ενδιάμεση αποθήκευση στο INTFLD
100	ISVDT	Αριθμός χρονικών βημάτων για ενδιάμεση

		αποθήκευση στο INTFLD
3	U INLET PROFILE	Αριθμός σημείων στη διανομή εισόδου
1.0	0.0	Διανομή U ταχύτητας στην είσοδο (όριο W)
1.0	0.5	Αδιαστατοποιημένη γραφή
1.0	1.0	U/UIN Y/RLENGTH
0	V INLET PROFILE	Όπως και για την U ταχύτητα
		V/UIN Y/RLENGTH
0	k INLET PROFILE	Όπως και για τις ταχύτητες
		k/UIN ² Y/RLENGTH
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.	Τιμές για αρχική αυθαίρετη κατανομή των
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.	ταχυτήτων και της θερμοκρασίας
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.	όταν KINTRM=0
0	Αριθμός ενδιάμεσων αποθηκεύσεων χρονικής εξέλιξης της λύσης	
0 0 0 0	Αντίγραφα του INTLFD στα DT1.DAT, DT2.DAT κ.τ.λ.	
0.000000	UNORTH	Μέσες ταχύτητες και συχνότητες για κινούμενα τοιχώματα στα όρια N,S,E,W π.χ. $U=UNORTH*\cos(2\pi*UNORTHFREQ*TIME)$
0.000000	USOUTH	
0.000000	VWEST	
0.000000	VEAST	
0.000000	U-NORTH FREQ.	
0.000000	U-SOUTH FREQ.	
0.000000	U-WEST FREQ.	
0.000000	U-EAST FREQ.	

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Μέσ'από τα παραδείγματα που ακολουθούν θα γίνει μια προσπάθεια εξοικείωσης στην χρήση του κώδικα σε διάφορες εφαρμογές οι οποίες και θα παρουσιάζονται τόσο από πλευράς δεδομένων εισόδου όσο και από πλευράς αποτελεσμάτων και κριτικής τους. Για όλα τα παραδείγματα, τα αρχεία δεδομένων εισόδου (οριακές συνθήκες, λειτουργικές παράμετροι, ιδιότητες υλικών) CTINPUT υπάρχουν στη συνοδευτική δισκέτα έτοιμα να εφαρμοστούν. Ενθαρρύνεται πάντως ο αναγνώστης να λαμβάνει πρωτοβουλία και να προχωρά σε παραμετρικές μελέτες των παραδειγμάτων με αλλαγές τόσο στα δεδομένα της ροής (μεγαλύτερες ταχύτητες, άλλα υλικά κ.τ.λ.) όσο και στις ίδιες τις γεωμετρίες (η τετραγωνική κοιλότητα στο παράδειγμα 4.10 θα μπορούσε να είναι ορθογωνική κ.τ.λ.). Τα πρώτα παραδείγματα αναλύονται αρκετά, δίνοντας λεπτομέρειες σχετικά με τα δεδομένα εισόδου, στη συνέχεια ορισμένες διαδικασίες παραλείπονται (τα στοιχεία είναι δοσμένα άλλωστε) και δίνεται περισσότερη έμφαση στα αποτελέσματα.

Μαζί με τα δεδομένα εισόδου, στη δισκέτα δίνονται και κάποια προγράμματα που διευκολύνουν τον χρήστη να εξάγει αποτελέσματα σε πιο εύχρηστη μορφή. Πέρα από το DATAOUT.FOR το οποίο έχει ήδη αναφερθεί, υπάρχει και το ARROW33.FOR το οποίο σχεδιάζει διανύσματα ταχυτήτων στη δεδομένη ροή. Όλα τα προγράμματα έχουν εκτελεστεί στη FORTRAN LAHEY, F77 version 5.00c4 η οποία, στη περίπτωση του ARROW33.FOR συνεργάζεται με τη βιβλιοθήκη γραφικών GRAPH3.LIB καθώς και με τον ελεγκτή HPNO.BIN. Η βιβλιοθήκη και ο ελεγκτής πρέπει να βρίσκονται στον υποκατάλογο όπου θα δημιουργηθεί και το εκτελέσιμο αρχείο. Τα διανύσματα σχεδιάζονται στην οθόνη, εκτυπώνονται απ'ευθείας ή γράφονται σε αρχείο (.HGL) το οποίο εισάγεται απ'ευθείας στους περισσότερους επεξεργαστές κειμένου των WINDOWS (π.χ. WORD). Για τα υπόλοιπα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν έχει γίνει χρήση των GRAPHER και SURFER για WINDOWS της GOLDEN SOFTWARE.

4.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΨΥΞΗ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΧΟΥΣ, ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ)

Ένα από τα πιο απλά προβλήματα που μπορεί να εξεταστεί είναι η περίπτωση της μετάδοσης θερμότητας σε ράβδο απείρου πάχους και πλάτους (οπότε το πρόβλημα θεωρείται μονοδιάστατο) στην οποία έχουν επιβληθεί σταθερές θερμοκρασίες στα δύο άκρα της. Σύμφωνα με τον νόμο για την αγωγή θερμότητας μέσα από στερεό υλικό χωρίς πηγές θερμότητας, θα είναι:

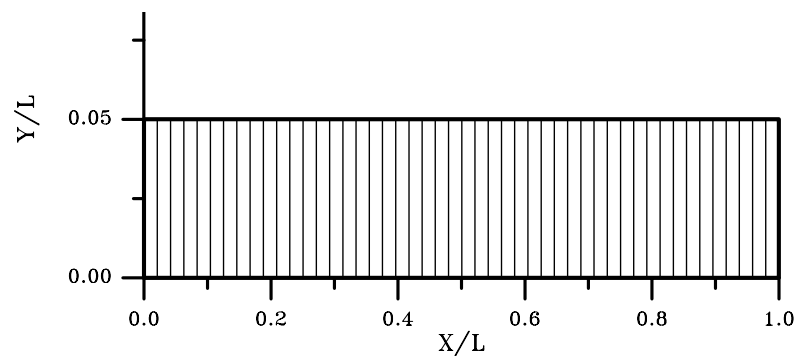
[4.1.1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

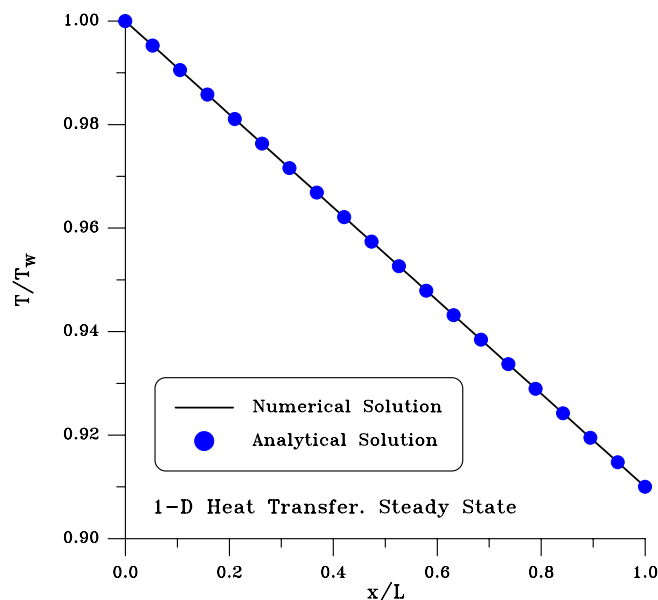
όπου (λ) είναι η θερμική αγωγιμότητα του υλικού. Αν το (λ) είναι σταθερό σε όλο το υλικό τότε, ανεξάρτητα από το υλικό, και για δεδομένη διαφορά θερμοκρασίας σε απόσταση (L), η κλίση της θερμοκρασίας θα είναι σταθερή σε όλο το σώμα του υλικού. Αυτό ακριβώς το φαινόμενο εξετάζεται εδώ με την επιβολή θερμοκρασιών στα άκρα ράβδου μήκους (L).

Πιο συγκεκριμένα, για τα δεδομένα εισόδου επιβάλλονται οι θερμοκρασίες $T_{W}=300$ K στο δυτικό όριο και η θερμοκρασία $T_{E}=273$ K στο ανατολικό. Φυσικά λύνεται μόνο η εξίσωση της θερμοκρασίας και το υπολογιστικό πλέγμα λαμβάνεται 50×3 , ομοιόμορφο. Λαμβάνουμε μόνο 3 κελιά στην y κατεύθυνση γιατί εξετάζουμε μονοδιάστατο φαινόμενο. Για το βόρειο και νότιο όριο θεωρούνται άξονες συμμετρίας ($I_{BOUNDN}=I_{BOUNDS}=2$) για να αντιμετωπιστεί ως μονοδιάστατο το πρόβλημα από τον CAFFCA. Το υλικό μπορεί να ληφθεί οποιοδήποτε, γιατί η κλίση θερμοκρασίας στη μόνιμη κατάσταση επηρεάζεται μόνο από τις θερμοκρασίες εισόδου και εξόδου και το μήκος της ράβδου ενώ οι ιδιότητες του υλικού επηρεάζουν μόνο την παροχή θερμότητας μέσα από τη ράβδο και συνεπώς εμφανίζονται μόνο στο χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα (βλ. επόμενο παράδειγμα). Να σημειωθεί ότι όταν λύνεται πρόβλημα αποκλειστικά και μόνο θερμικής

αγωγής, οι παράμετροι μ (συνεκτικότητα) και Pr (αριθμός Prandtl) πρέπει να λαμβάνονται τέτοιοι ώστε $\mu/Pr=\lambda/C_p$, όπου λ =συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας και C_p =ειδική θερμοχωρητικότητα. Ο συντελεστής υποχαλάρωσης για τη θερμοκρασία διατηρεί την τιμή της μονάδας μιας και δεν υπάρχει εξάρτηση από άλλη εξίσωση και η σύγκλιση είναι εξασφαλισμένη (επιτυγχάνεται σε 2-3 επαναλήψεις). Πρέπει πάντως να τονιστεί ότι σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει ταχύτητα εισόδου ροής (UIN) τα υπόλοιπα των εξισώσεων δεν αδιαστατοποιούνται και επομένως θα πρέπει να βεβαιωθεί κανείς για την σύγκλιση με χαμηλό κριτήριο (SORMAX στο CTINPUT).



Σχήμα 4.1.1 Υπολογιστικό πλέγμα 50x3 για την αντιμετώπιση μονοδιάστατης αγωγής θερμότητας.. (Το σχήμα δεν είναι υπό κλίμακα)

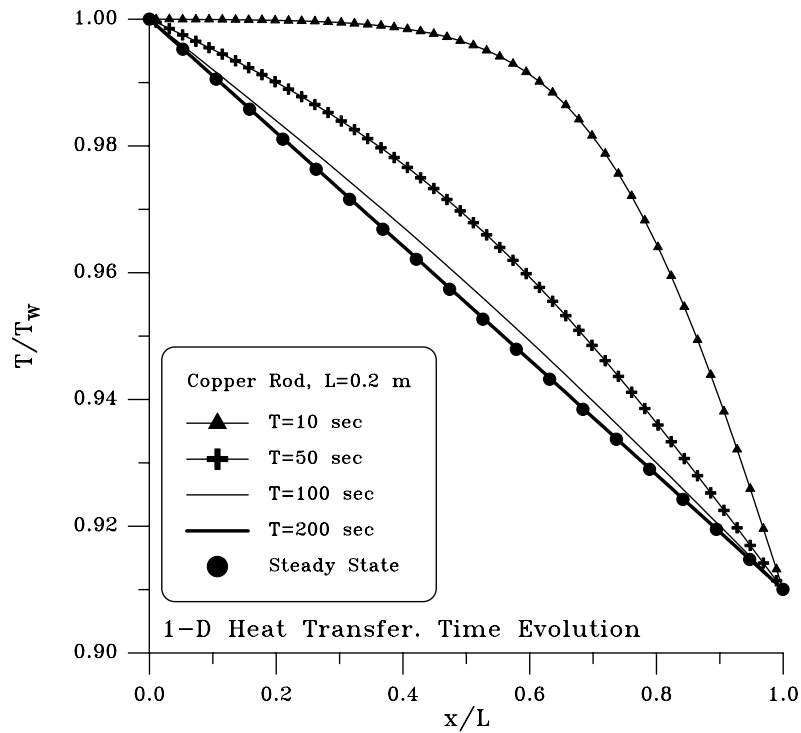


Σχήμα 4.1.2 Διανομή θερμοκρασίας κατά μήκος στερεής ράβδου στα άκρα της οποίας έχουν επιβληθεί σταθερές θερμοκρασίες.

Στο Σχήμα 4.1.1 και Σχήμα 4.1.2 φαίνεται το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε καθώς και η διανομή της θερμοκρασίας μέσα στη ράβδο. Είναι εμφανής η διατήρηση της κλίσης της θερμοκρασίας μέσα στη ράβδο. Η σημασία της διατήρησης αυτής θα φανεί και στο επόμενο παράδειγμα όπου το πρόβλημα λύνεται και ως συνάρτηση του χρόνου.

4.2 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΨΥΞΗ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΠΑΧΟΥΣ, ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ)

Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος θεωρείται τώρα το ίδιο φαινόμενο αλλά θα διερευνηθεί η εξέλιξή του στον χρόνο. Πρόκειται στην ουσία για την περίπτωση ψύξης μιας χάλκινης ράβδου ($\lambda=401$ W/m/K, $C_p=385$ J/kg/K, $\rho=8933$ kg/m³) μήκους $L=0.2$ m (το πλάτος λαμβάνεται 0.01 m αλλά δεν έχει σημασία αφού επιβάλλονται συνθήκες συμμετρίας στο βόρειο και νότιο όριο και το πρόβλημα είναι στην ουσία μονοδιάστατο). Η ράβδος ξεκινά με θερμοκρασία 300 K ($T_{WW}=300$, $INIT. TEMP.=300$) και ξαφνικά επιβάλλεται στο ένα της άκρο θερμοκρασίας 273 K ($T_{WE}=273$). Το φαινόμενο παρακολουθείται για 200 sec με χρονικό βήμα 1 sec. Τονίζεται ότι στη περίπτωση αυτή παίζει ρόλο τόσο το υλικό της ράβδου όσο και το μήκος της. Είναι προφανές ότι μια ράβδος με $L=2$ m, για παράδειγμα, δεν θα έφτανε σε μόνιμη κατάσταση σε 200 sec αλλά σε πολύ περισσότερο χρόνο. Επίσης, για ένα πιο μονωτικό υλικό (π.χ. μόλυβδος με $\lambda=35$ W/m/K) θα χρειαζόταν επίσης πολύ περισσότερος χρόνος για να φτάσει η ράβδος στη μόνιμη κατάσταση. Η παραμετρική αυτή μελέτη αφήνεται στον αναγνώστη (άλλωστε χρειάζεται μόνο η αλλαγή 2-3 παραμέτρων στο αρχείο εισόδου και τίποτε περισσότερο).



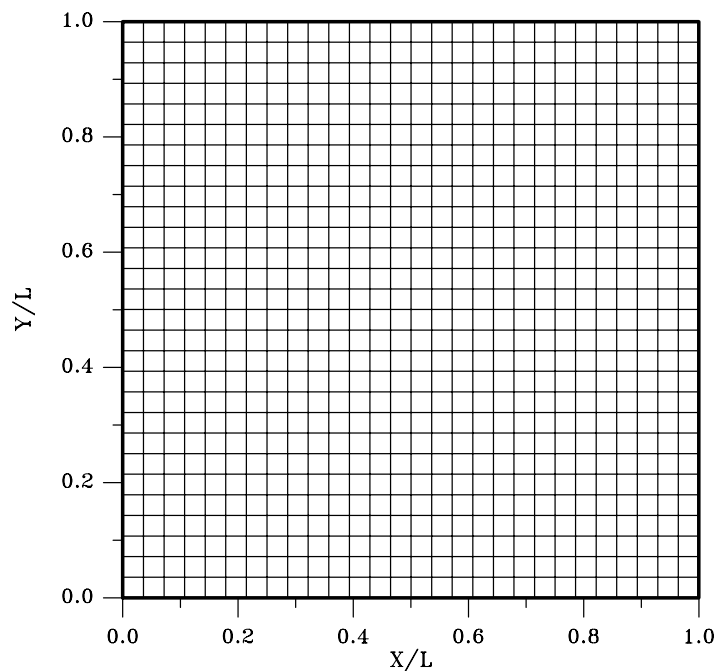
Σχήμα 4.2.1 Διανομή θερμοκρασίας σε χάλκινη ράβδο στο δεξιό άκρο της οποίας επιβάλλεται απότομα χαμηλότερη θερμοκρασία

Η διανομή για την περίπτωση που περιγράφηκε πιο πάνω φαίνεται στο Σχήμα 4.2.1. Σημειώνεται ότι η σύγκλιση γίνεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως και στη προηγούμενη άσκηση μόνο που εκτελούνται 200 χρονικά βήματα (λύνονται 200 προβλήματα όμοια με το προηγούμενο).

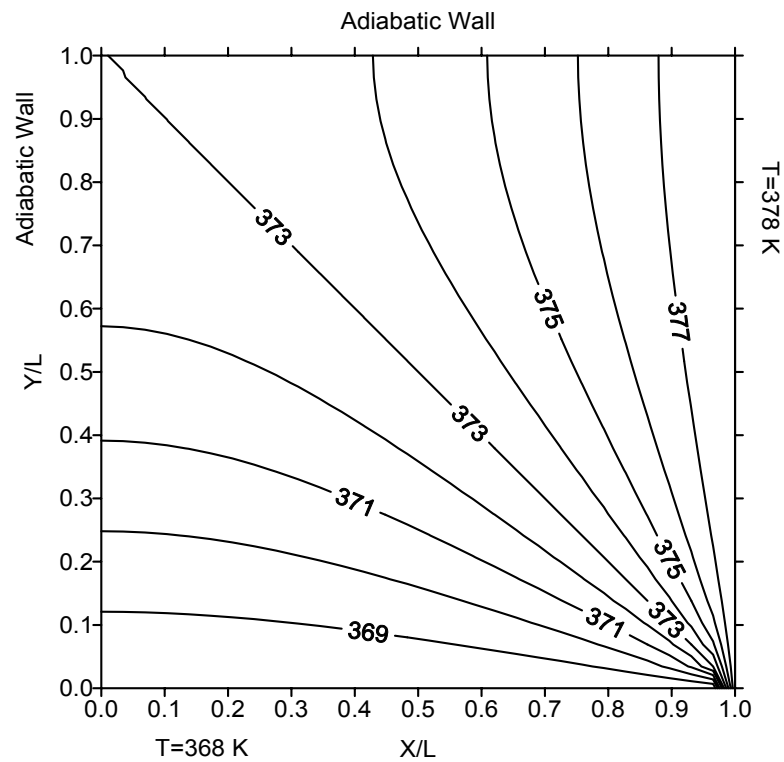
4.3 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ, ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ)

Στην ίδια λογική με τις προηγούμενες ασκήσεις είναι και αυτή, μόνο που τώρα το εξεταζόμενο σώμα είναι διδιάστατο, μία τετραγωνική ράβδος απείρου μήκους, πλευράς L .

Το βόρειο και δυτικό τοίχωμα της διατομής της ράβδου είναι τέλεια μονωμένα, αδιαβατικά, οπότε επιβάλλονται συνθήκες συμμετρίας. Οι συνθήκες συμμετρίας επιβάλλουν τον μηδενισμό της πρώτη παραγώγου κάθετα στο όριο έτσι ώστε η κλίση θερμοκρασίας να είναι μηδενική και να μην υπάρχει ροή θερμότητας. Στα δεδομένα εισόδου δίνεται $IBOUNDW=IBOUNDN=2$ και $IBOUNDE=IBOUNDS=1$ για τοίχωμα στο οποίο θα δοθεί σταθερή θερμοκρασία $TWS=368\text{ K}$ και $TWE=378\text{ K}$. Αναμένεται δηλαδή μια ροή θερμότητας από το ανατολικό στο νότιο όριο. Το υπολογιστικό πλέγμα λαμβάνεται 30×30 ομοιόμορφο και επιλύεται η μόνιμη κατάσταση θέτοντας χρονικό βήμα πολύ μεγάλο π.χ. $\delta t=10^{30}$. Το υλικό δεν παίζει ρόλο ως προς την τελική κατάσταση αλλά επηρεάζει τον χρόνο στον οποίο θα επιτευχθεί. Αυτό θα εξεταστεί στην επόμενη παράγραφο.



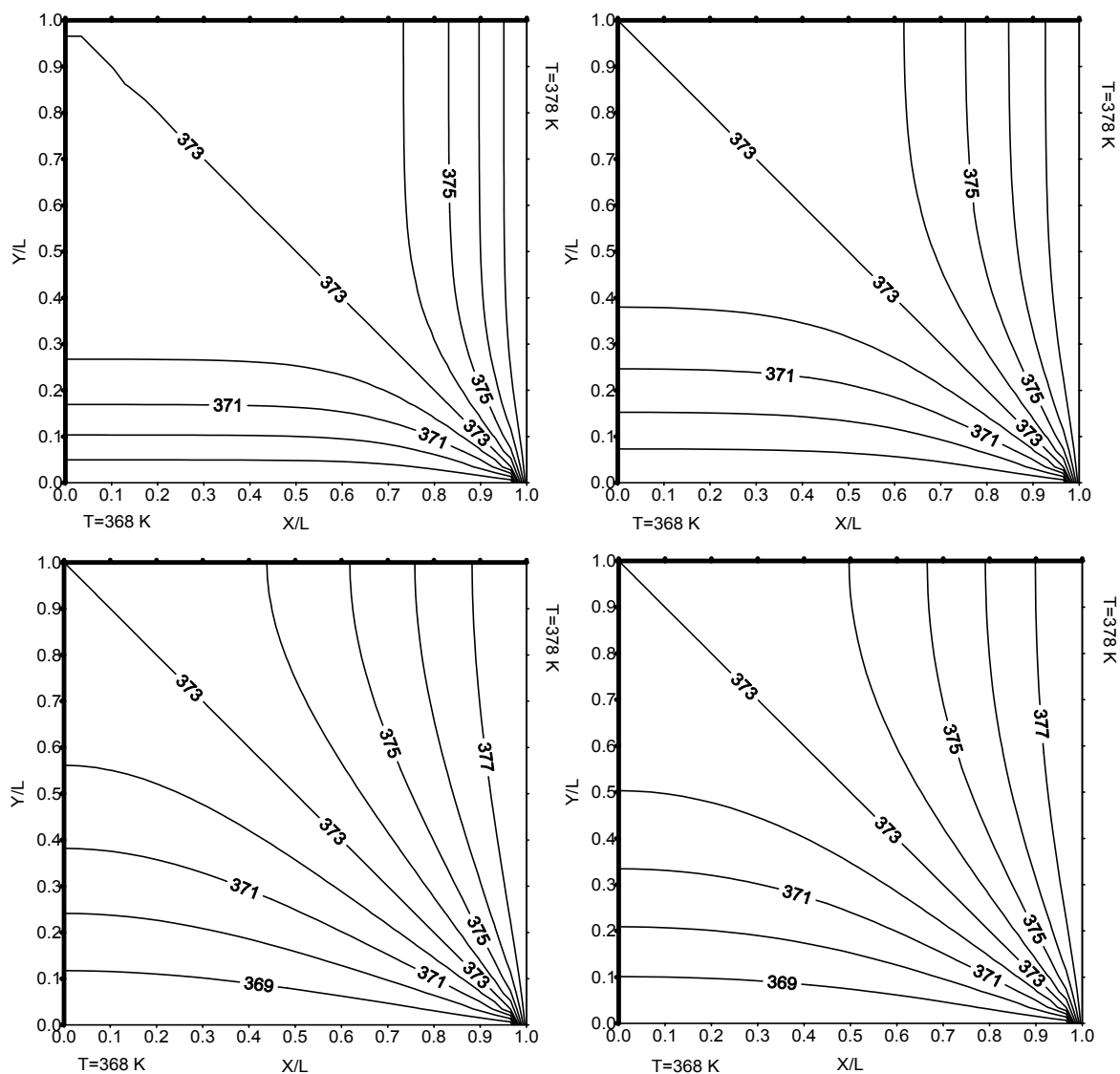
Σχήμα 4.3.1 Υπολογιστικό πλέγμα 30×30 για την επίλυση θερμοκρασιακού πεδίου σε εγκάρσια διατομή τετραγωνικής ράβδου απείρου μήκους.



Σχήμα 4.3.2 Διανομή θερμοκρασίας στην εγκάρσια διατομή τετράγωνης ράβδου απείρου μήκους. Μόνιμη κατάσταση.

4.4 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΘΕΡΜΑΝΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΑΒΔΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΑΔΙΑΒΑΤΙΚΑ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ, ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ)

Όπως και στη μονοδιάστατη θεώρηση, θα εξεταστεί τώρα η χρονική εξέλιξη της αποκατάστασης της μόνιμης κατάστασης. Για χάλκινη ράβδο ($\lambda=401$ W/m/K, $C_p=385$ J/kg/K, $\rho=8933$ kg/m³) πλευράς $L=0.1$ m η οποία αρχικά έχει θερμοκρασία 373 K επιβάλλεται στο νότιο τοίχωμά της σταθερή θερμοκρασία $T_{WS}=368$ K και στο ανατολικό τοίχωμα $T_{WE}=378$ K ενώ οι άλλες δύο πλευρές είναι αδιαβατικά τοιχώματα. Το υπολογιστικό πλέγμα είναι 30×30 και το χρονικό βήμα $\Delta t=0.5$ sec. Ο υπολογισμός συνεχίζεται για 15 sec μέχρι τη μόνιμη κατάσταση (βλ. και Σχήμα 4.3.2)

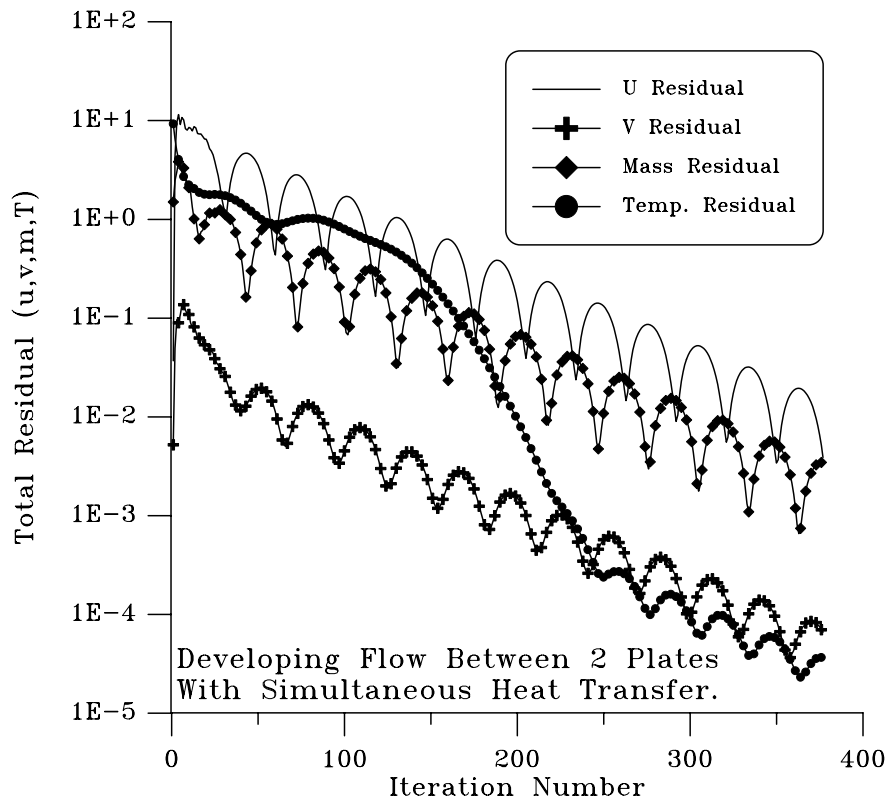


Σχήμα 4.4.1 Χρονική εξέλιξη ανομοιόμορφης θέρμανσης της εγκάρσιας διατομής χάλκινης τετραγωνικής ράβδου με $L=0.1$ m. Κυκλικά από αριστερά $T=2, 4, 8$ και 15 sec.

4.5 ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΗ ΡΟΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΔΥΟ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΜΗΚΟΥΣ

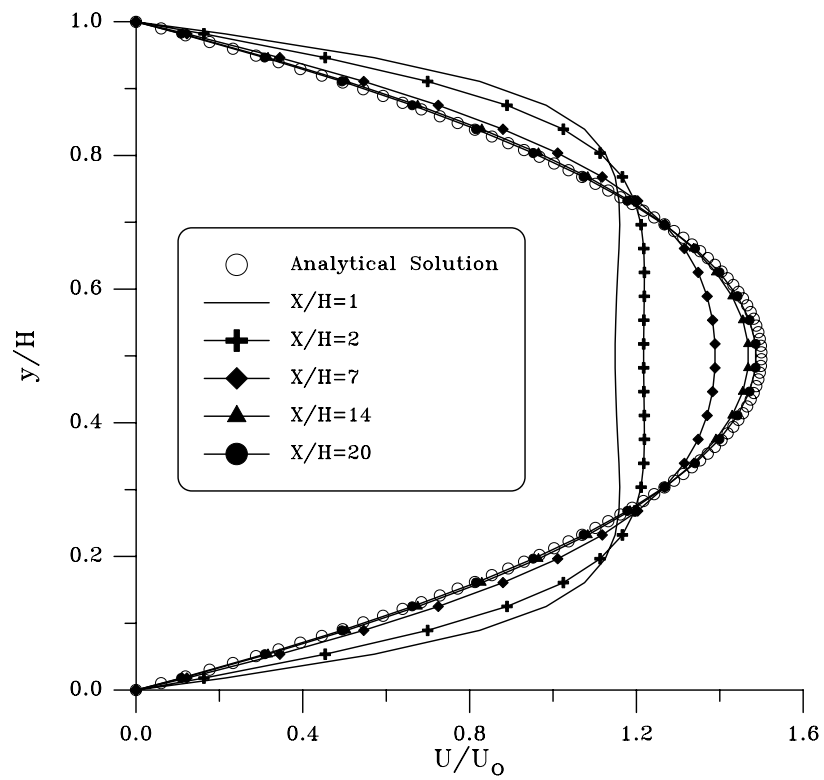
Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην επιβολή μιας ομοιόμορφης διανομής της ταχύτητας στην είσοδο ανάμεσα στις δύο πλάκες ενώ η θερμοκρασίας της ροής είναι 27°C . Στο κατάντι της ροής τα οριακά στρώματα στην επιφάνεια των δύο πλακών αρχίζουν να αναπτύσσονται και κάποια στιγμή συναντώνται και δημιουργούν την πλήρως ανεπτυγμένη παραβολική μορφή της διανομής της ταχύτητας. Συγχρόνως αναπτύσσονται και τα θερμικά οριακά στρώματα ανάμεσα στις πλάκες λόγω του ότι οι πλάκες βρίσκονται σε σταθερή θερμοκρασία 50°C .

Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι 50×30 , ομοιόμορφο και το ρευστό εισέρχεται με ομοιόμορφη διανομή ταχύτητας και θερμοκρασίας. Ο αριθμός Reynolds της ροής ορίζεται $\text{Re} = U_0 2H / \nu = 780$, όπου H η απόσταση μεταξύ των πλακών (ο αριθμός Reynolds ορίζεται με βάση την υδραυλική διάμετρο $d_h = 4 \cdot \text{επιφάνεια διατομής} / \text{περίμετρο διατομής}$). Η ροή θεωρείται στρωτή και η παραβολική διανομή της ταχύτητας αναμένεται να έχει μέγιστο 1.5 φορές της μέσης τιμής της. Έχοντας θέσει στερεά τοιχώματα στο βόρειο και νότιο όριο η έξοδος γίνεται από δεξιά (ανατολικό όριο) και η σύγκλιση ακολουθεί την πορεία που φαίνεται στο Σχήμα 4.5.1 με συντελεστές υποχαλάρωσης 0.5 για τις ταχύτητες, και τη θερμοκρασία και 0.3 για την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης. Η περιοδικότητα που εμφανίζεται στον ρυθμό σύγκλισης έχει να κάνει με τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων. Κατά την επίλυση με την μέθοδο ADI (όπως εδώ) αντιμετωπίζονται τα σφάλματα που αντιστοιχούν στο μέγεθος της διακριτοποίησης που έχει γίνει, ($\mathcal{O}(\delta x)$). Τα σφάλματα όμως της τάξης του $\mathcal{O}(2\delta x)$ κ.τ.λ. παραμένουν, και δημιουργούν περιοδικότητα στη σύγκλιση. Όταν χρησιμοποιούνται μέθοδοι πολυπλεγμάτων όπου η διακριτοποίηση πηγαίνει συνεχώς από (δx) σε $(2\delta x)$ από πλέγμα σε πλέγμα ή και με τη χρήση επιλυτών όπως το conjugate gradient, τα σφάλματα διαφόρων τάξεων αντιμετωπίζονται συγχρόνως και δεν εμφανίζεται η έντονη περιοδικότητα όπως στο Σχήμα 4.5.1.

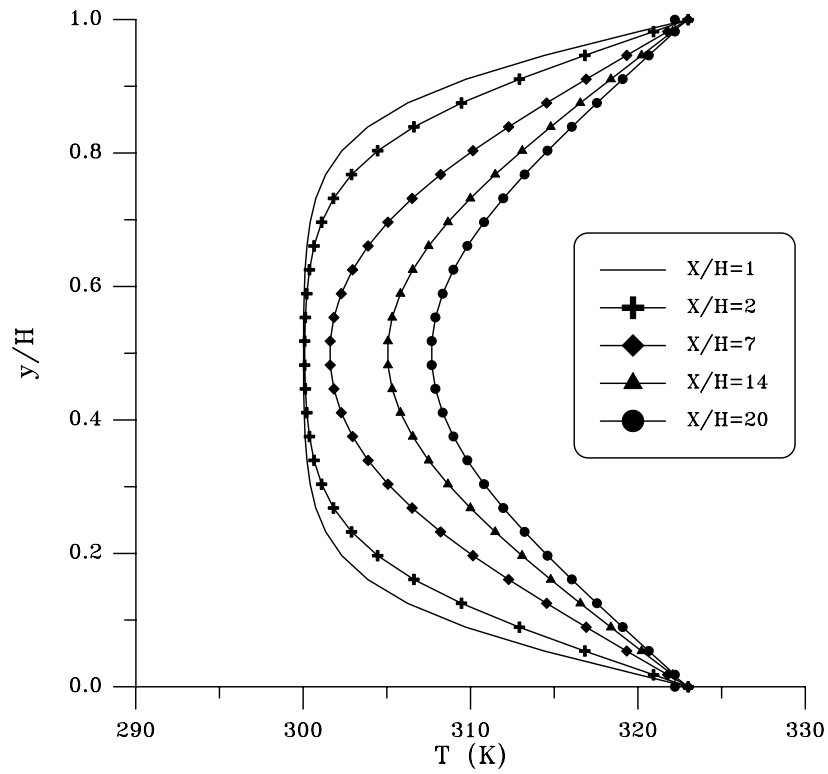


Σχήμα 4.5.1. Ρυθμός σύγκλισης των επιλυόμενων μεταβλητών.

Στο Σχήμα 4.5.2 φαίνεται η εξέλιξη της διανομής της ταχύτητας ανάλογα με την απόσταση από την είσοδο ανάμεσα στις δύο πλάκες. Φαίνεται ότι η παραβολική μορφή αρχίζει να αποκτάται μετά από 15H από την είσοδο και έχει σχηματιστεί πλήρως στα 20H. Στο Σχήμα 4.5.3 φαίνεται η διανομή της θερμοκρασίας στις αντίστοιχες θέσεις. Είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι το ρευστό δεν έχει αποκτήσει ακόμη την θερμοκρασία των τοιχωμάτων ενώ είναι εμφανής η τάση του προς την ομοιόμορφη διανομή θερμοκρασίας. Το φαινόμενο αυτό έχει να κάνει με την διάχυση θερμότητας από τα τοιχώματα προς το εσωτερικό της ροής και εξαρτάται κυρίως από τον αριθμό Pr. Θα ήταν ενδιαφέρον για τον αναγνώστη να δοκιμάσει την ίδια ροή, χρησιμοποιώντας όμως διαφορετικό ρευστό ή άλλον αριθμό Reynolds της ροής. Σε τυρβώδη ροή ($Re \approx 5000$) τι θα συμβεί ;



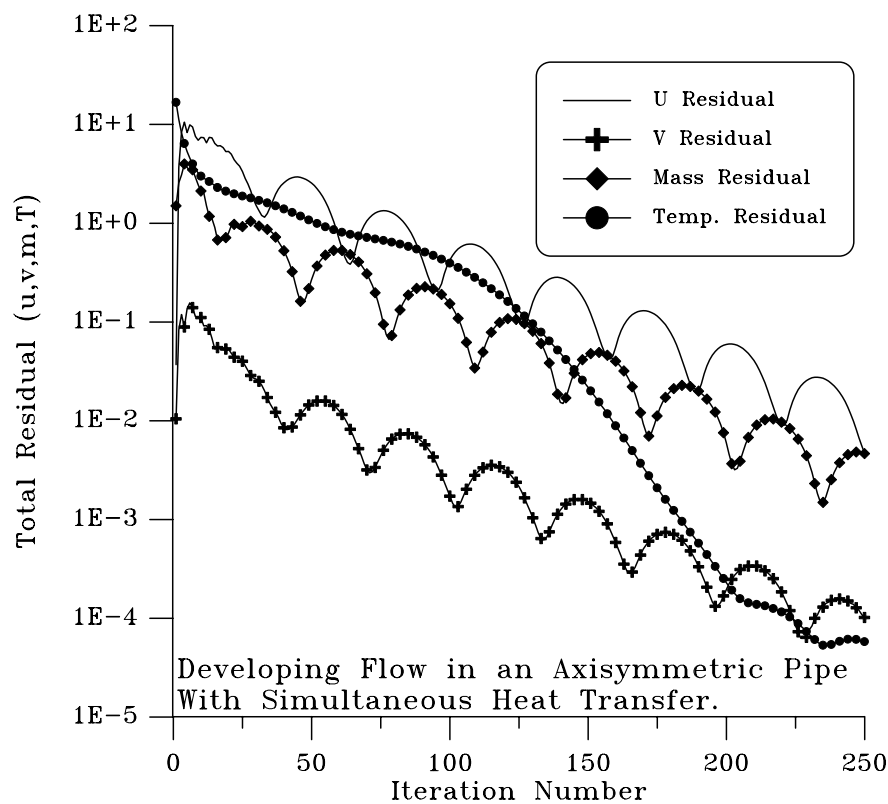
Σχήμα 4.5.2. Διανομή της κύριας ταχύτητας στην εγκάρσια κατεύθυνση σε διάφορες αποστάσεις από την είσοδο. Σύγκριση με την αναμενόμενη παραβολική διανομή.



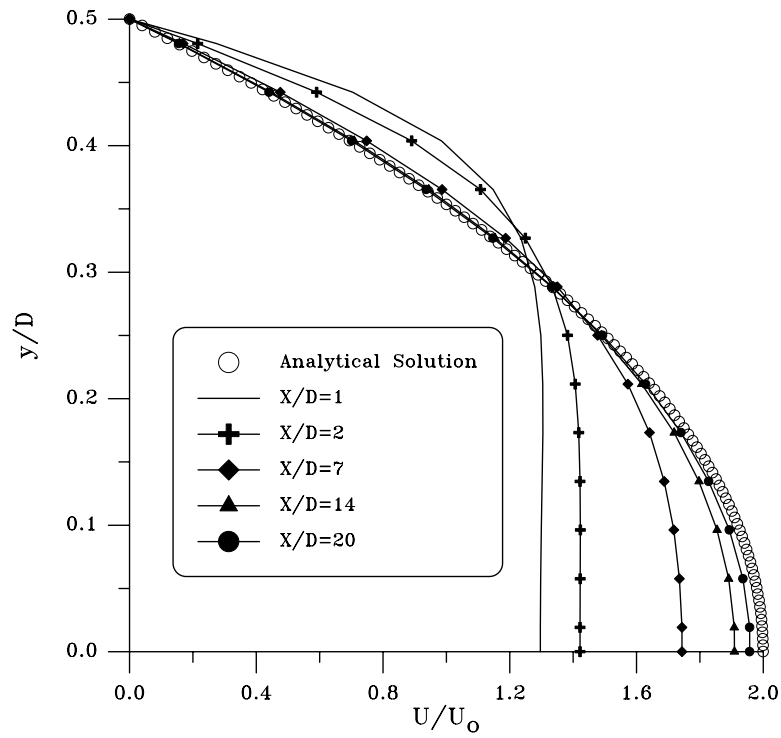
Σχήμα 4.5.3 Διανομή θερμοκρασίας ανάμεσα στις παράλληλες πλάκες. Το ρευστό εισέρχεται με $T=300$ K και οι πλάκες έχουν θερμοκρασίας $T_w=323$ K.

4.6 ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΜΕΝΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ ΜΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΟΙΧΩΜΑ.

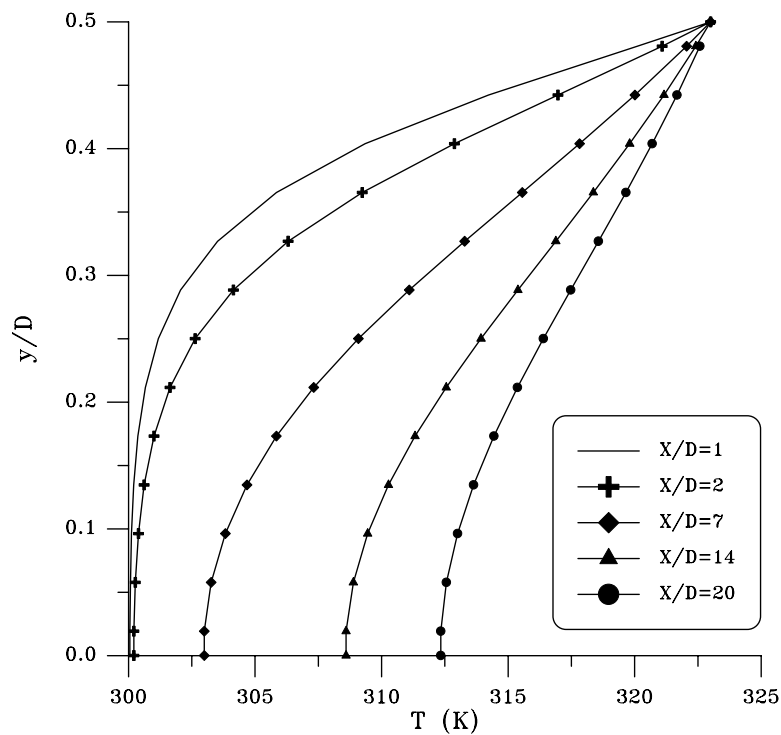
Το πρόβλημα είναι σχεδόν ταυτόσημο με το προηγούμενο μόνο που εδώ λύνεται σε αξονοσυμμετρικές συντεταγμένες ($INDCOS \neq 1$) και γίνεται χρήση της συμμετρίας του προβλήματος θέτοντας μόνο το βόρειο όριο ως τοίχωμα. Το νότιο όριο τίθεται άξονας συμμετρίας ($IBOUNDS=2$) και το υπολογιστικό πλέγμα, για να υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης με τη προηγούμενη περίπτωση, μειώνεται σε 50×15 . Ο αριθμός Reynolds ορίζεται $Re = U_0 D / \nu = 390$ όπου D είναι η διάμετρος του αγωγού. Υπενθυμίζεται ότι η μέγιστη διάσταση που επιλύεται στη Y κατεύθυνση είναι $D/2$ αφού λύνεται μόνο η μισή γεωμετρία, λόγω συμμετρίας. Για την περίπτωση του κυκλικού αγωγού η πλήρως ανεπτυγμένη μορφή της διανομής της ταχύτητας είναι και πάλι παραβολική αλλά με μέγιστη ταχύτητα 2 φορές τη τιμή της μέσης ταχύτητας (η μέση ταχύτητα συμπίπτει με την ομοιόμορφη ταχύτητα εισόδου λόγω του νόμου της συνέχειας). Σε αναλογία με το προηγούμενο πρόβλημα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.



Σχήμα 4.6.1 Ρυθμός σύγκλισης των επιλυόμενων μεταβλητών.



Σχήμα 4.6.2 Διανομή της κύριας ταχύτητας στην εγκάρσια κατεύθυνση σε διάφορες αποστάσεις από την είσοδο. Σύγκριση με την αναμενόμενη παραβολική διανομή.

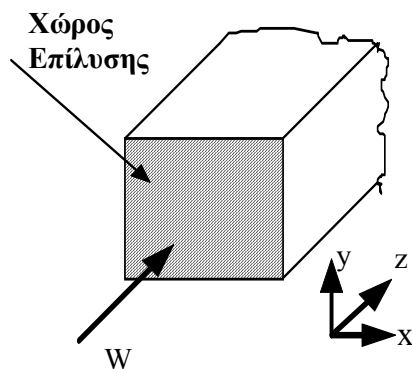


Σχήμα 4.6.3 Διανομή θερμοκρασίας μέσα στον κυκλικό σωλήνα. Το ρευστό εισέρχεται με $T=300$ K και το τοίχωμα έχει θερμοκρασία $T_w=323$ K.

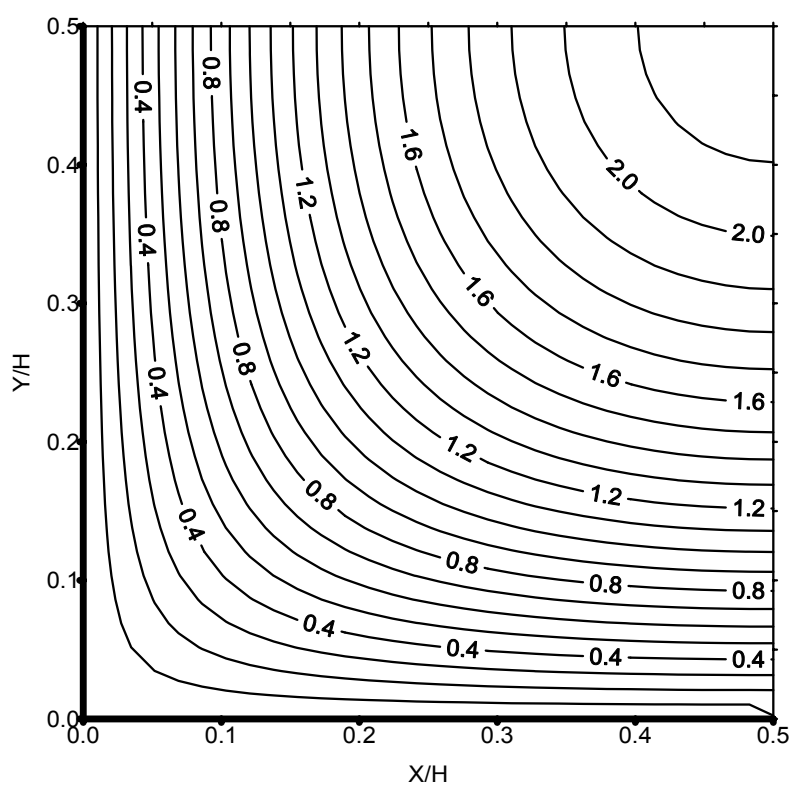
4.7 ΠΛΗΡΩΣ ΑΝΕΠΤΥΓΜΕΝΗ ΡΟΗ ΣΕ ΣΩΛΗΝΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Εδώ θα εξεταστεί η περίπτωση της διανομής της αξονικής ταχύτητας στην εγκάρσια διατομή ενός σωλήνα τετραγωνικής διατομής. Η επίλυση εδώ γίνεται βασιζόμενη στο γεγονός ότι οι εξισώσεις μεταφοράς είναι οι ίδιες για όλα τα μεγέθη με τη διαφορά των όρων πηγής. Για την περίπτωση της εγκάρσιας διατομής που εξετάζεται εδώ η ταχύτητα W μεταφέρεται μέσα στη διατομή μόνο λόγω διάχυσης και ο όρος ο οποίος της επιβάλλεται είναι η κλίση πίεσης στη z κατεύθυνση (dP/dz). Έτσι αν λάβουμε την εξίσωση θερμοκρασίας και στο δεξιό μέρος της προσθέσουμε έναν όρο πηγής ίσο με την κλίση πίεσης η οποία θα επικρατεί σε όλο το μήκος του αγωγού στη πλήρως διαμορφωμένη περιοχή, είναι δυνατό να πάρουμε την διανομή της W ταχύτητας στην εγκάρσια διατομή. Ως γνωστό η κλίση πίεσης παραμένει σταθερή στη πλήρως διαμορφωμένη ροή στον ορθογωνικό αγωγό. Ο χώρος επίλυσης φαίνεται στο Σχήμα 4.7.1. Για λεπτομερέστερη θεώρηση του προβλήματος παραπέμπεται ο αναγνώστης στο βιβλίο “Υπολογιστική Ρευστομηχανική” του καθ. Γ. Μπεργελέ.

Η επίλυση γίνεται σε ομοιόμορφο πλέγμα 30×30 λαμβάνοντας την διπλή συμμετρία έτσι ώστε να λύνεται μόνο το ένα τεταρτημόριο της διατομής οπότε επιβάλλονται στερεά τοιχώματα στο δυτικό και νότιο όριο ενώ στο βόρειο και ανατολικό επιβάλλονται συνθήκες συμμετρίας. Η κλίση πίεσης λαμβάνεται από την προηγούμενη επίλυση ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες (ενδεικτικά) και είναι $dP/dz=0.001 \text{ N/m}$ η οποία τίθεται ως τιμή του όρου πηγής της εξίσωσης της θερμοκρασίας (Source Term Value=0.001, και INCALCON=True.). Η διανομή φαίνεται στο Σχήμα 4.7.2 με τη μέγιστη τιμή στο κέντρο του αγωγού.



Σχήμα 4.7.1 Σχηματική παράσταση του χώρου επίλυσης για την πλήρως ανεπτυγμένη ροή στην εγκάρσια διατομή σωλήνα ορθογωνικής διατομής.

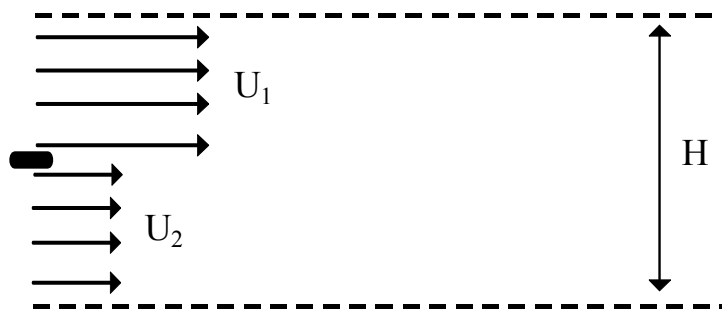


Σχήμα 4.7.2 Διανομή της αξονικής ταχύτητας W στην εγκάρσια διατομή σωλήνα ορθογωνικής διατομής.

4.8 ΡΟΗ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ ΔΥΟ ΡΕΥΜΑΤΩΝ ΡΕΥΣΤΟΥ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

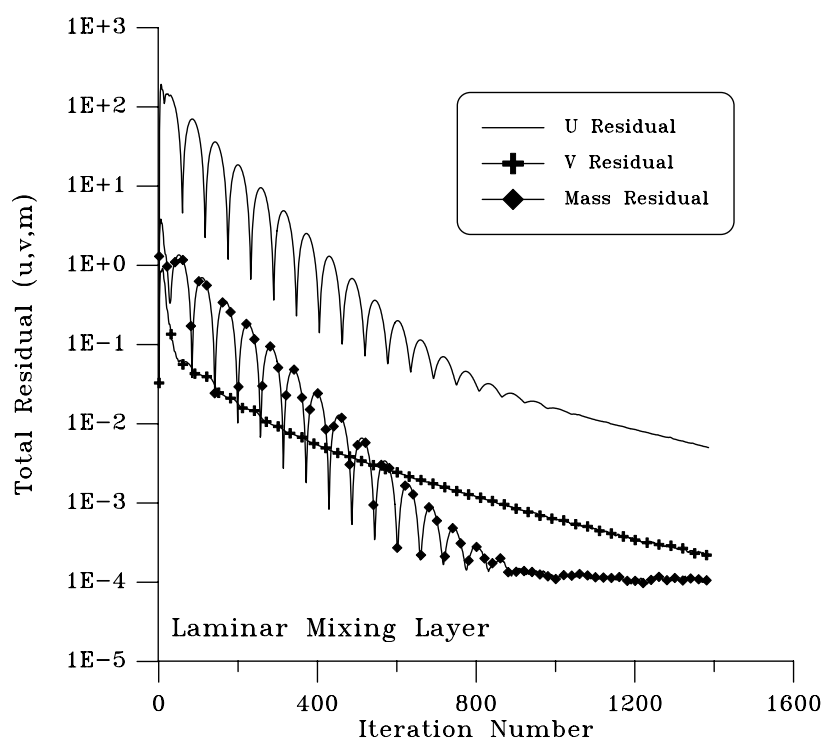
Το πρόβλημα αυτό είναι ένα από τα πιο πολύπλοκα στη μηχανική των ρευστών όσο απλή και αν φαίνεται η γεωμετρία του. Δύο ρεύματα ρευστού με διαφορετική ταχύτητα μεταξύ τους συναντώνται ξαφνικά και αναμειγνύονται. Αυτό το φαινόμενο συναντάται π.χ. στην ακμή εκφυγής μιας επίπεδης πλάκας, ή μιας αεροτομής όπου συναντώνται ξαφνικά τα δύο ρεύματα από το πάνω και κάτω μέρος του στερεού ορίου. Στην πραγματικότητα υπάρχει έντονη μη μονιμότητα του φαινομένου με τον σχηματισμό στροβίλων οι οποίοι συνεχίζονται και σε μεγάλη απόσταση από το σημείο ανάμειξης. Εδώ θα εξεταστεί η υπεραπλουστευμένη μορφή της μέσης χρονικά ροής και θα παρακολουθηθεί η σταδιακή εξομάλυνση της διαφοράς ταχυτήτων που υπάρχει αρχικά.

Θεωρούμε στην είσοδο του υπολογιστικού χώρου δύο ρεύματα ταχυτήτων, το ένα με τη διπλάσια ταχύτητα του άλλου ενώ για την απλούστευση της λύσης δεχόμαστε ότι στο άνω και κάτω όριο υπάρχει συμμετρία της ροής. Η γεωμετρία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

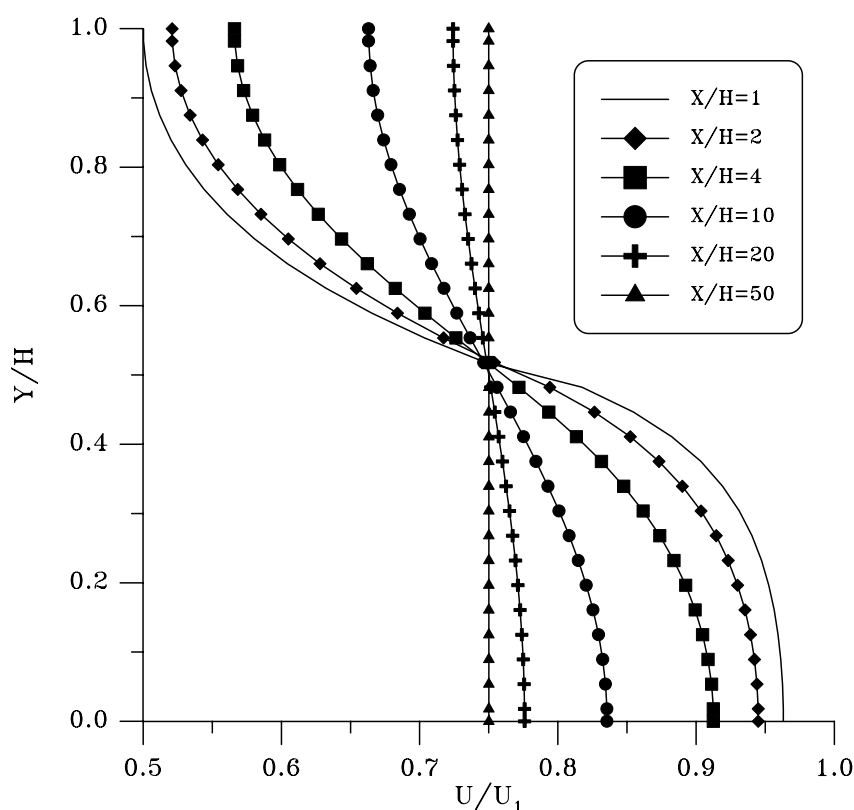


Σχήμα 4.8.1 Γεωμετρία ανάμειξης δύο παράλληλων ρευμάτων ρευστού.

Το ρευστό είναι νερό και ο αριθμός Reynolds της ροής με βάση το ύψος H και την ταχύτητα U_1 ήταν $Re=100$. Η σύγκλιση είναι μάλλον δύσκολη οπότε έγινε χρήση συντελεστών υποχαλάρωσης 0.3 για τις ταχύτητες και 0.1 για την εξίσωση διόρθωσης πίεσης. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε ήταν 50×30 και είχε ομοιόμορφη κατανομή στο χώρο. Ο ρυθμός σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 4.8.2 ενώ οι διανομές της κύριας ταχύτητας της ροής σε διάφορες αποστάσεις από την είσοδο φαίνονται στο Σχήμα 4.8.3 όπου είναι φανερό ότι αποκαθίσταται η ομοιόμορφη διανομή της μέσης ταχύτητας σε απόσταση $50H$.



Σχήμα 4.8.2 Ρυθμός σύγκλισης των εξισώσεων για την επίλυση των ρευμάτων ανάμειξης.



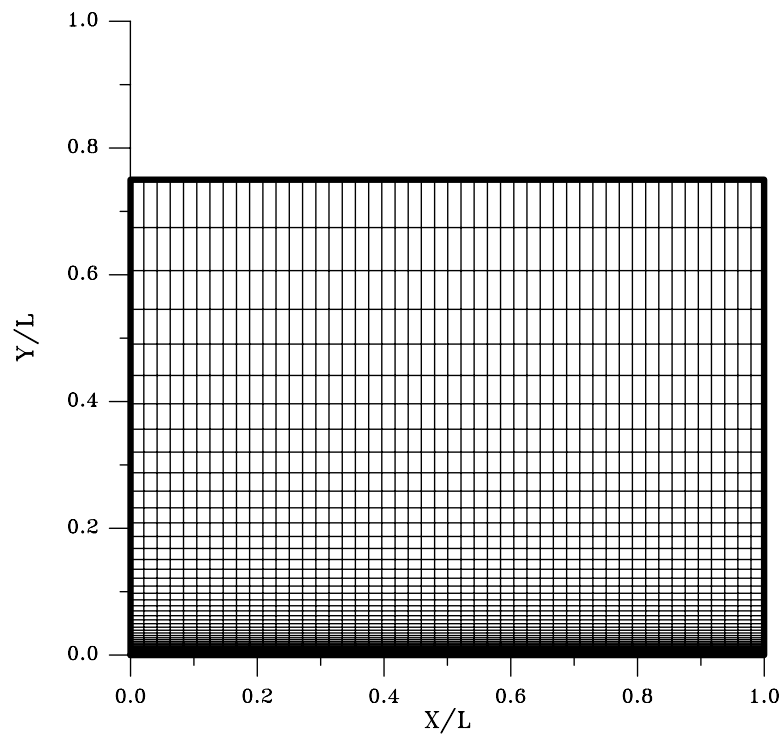
Σχήμα 4.8.3 Διανομές της κύριας ταχύτητας της ροής σε διάφορες αποστάσεις από την είσοδο για δύο παράλληλα ρεύματα.

4.9 ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΑΛΑΝΤΟΥΜΕΝΗ ΠΛΑΚΑ (2Ο ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ STOKES)

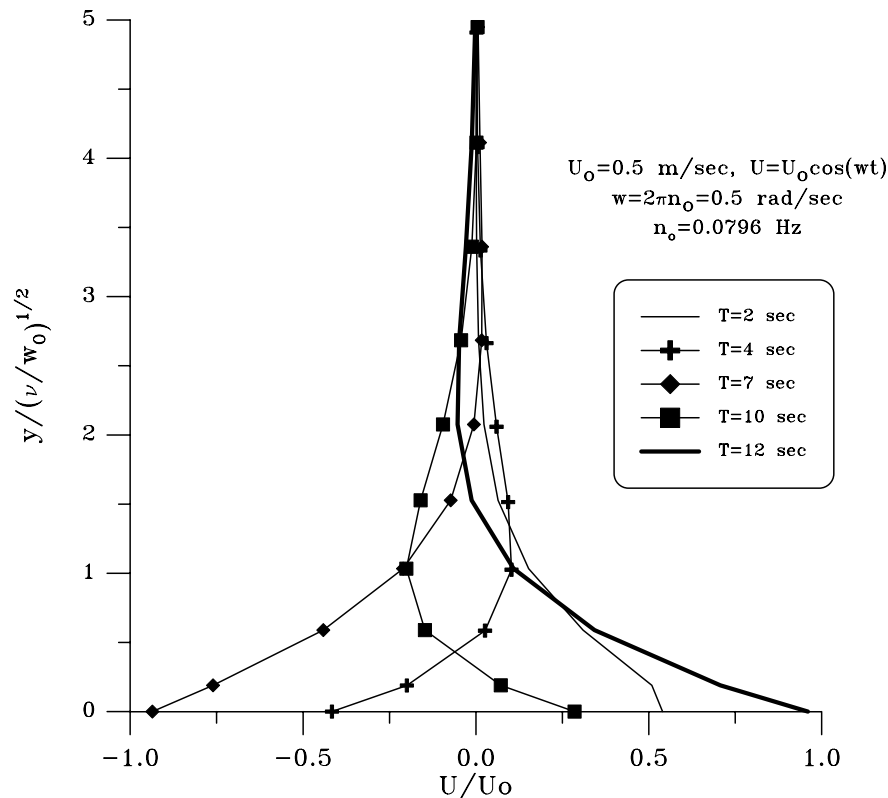
Το δεύτερο πρόβλημα του Stokes έχει να κάνει με την ροή πάνω από μια επίπεδη πλάκα μήκους L η οποία ταλαντώνεται πάνω στο επίπεδό της με ταχύτητα που ακολουθεί τον νόμο $U=U_0\cos(2\pi n_0)$. Λόγω διάχυσης (επίδραση συνεκτικότητας) το ρευστό που βρίσκεται σε επαφή με τη πλάκα θα αρχίσει να κινείται και να μεταδίδει τη κίνησή του στο υπόλοιπο ρευστό που βρίσκεται πιο πάνω κ.ο.κ.

Το πρόβλημα λύνεται χρονικά μεταβαλλόμενο με χρονικό βήμα 1 sec αφού επιλέγουμε το νότιο τοίχωμα να κινείται (IBOUNDS=4). Αυτό συνοδεύεται από τη μέση τιμή της ταχύτητας (USOUTH=0.5 m/sec) και από τη συχνότητα της ταλάντωσης (USOUTH FREQ.=0.0796 Hz) οπότε η περίοδος είναι 12.56 sec. Το υπόλοιπα όρια επιλέγονται όλα ως ελεύθερα όρια με IBOUND=3 για εισερχόμενο-εξερχόμενο ρευστό. Το πλέγμα είναι 50x50

ανομοιόμορφο και φαίνεται στο Σχήμα 4.9.1. Οι κάθετες διανομές της παράλληλης στη πλάκα ταχύτητας φαίνονται στο Σχήμα 4.9.2 για μια ολόκληρη περίοδο ταλάντωσης.



Σχήμα 4.9.1 Υπολογιστικό πλέγμα 50x50 για τον υπολογισμό ροής πάνω από ταλαντούμενη πλάκα.

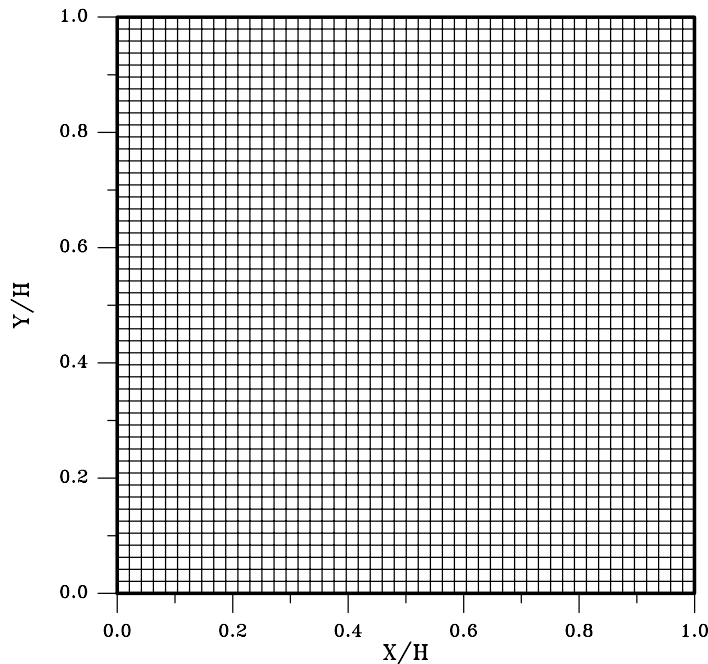


Σχήμα 4.9.2 Κάθετη διανομή παράλληλης ταχύτητας σε διάφορες χρονικές στιγμές στο κέντρο ταλαντούμενης πλάκας.

4.10 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΜΕΣΑ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΚΟΙΛΩΜΑ ΜΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΟΡΙΟ

Στο παράδειγμα αυτό εξετάζεται η ροή μέσα σε ορθογωνική κοιλότητα της οποίας το πάνω τοίχωμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Το ενδιαφέρον της περίπτωσης αυτής είναι η μεγάλη ανακυκλοφορία που σχηματίζεται στο κέντρο της κοιλότητας. Αποτελεί δε μια πολύ καλή γεωμετρία για έλεγχο της αριθμητικής μεθοδολογίας σχετικά με την ακρίβειά της και την απόδοση των σχημάτων έναντι διαφόρισης. Η ανακυκλοφορία επικρατεί σε ολόκληρο το πεδίο έτσι ώστε αφ' ενός η λύση να είναι ευαίσθητη σε προβλήματα αριθμητικής διάχυσης αφ' ετέρου δε να είναι σημαντική η ακρίβεια στον υπολογισμό των όρων μεταφοράς αλλά και διάχυσης. Έτσι στη περίπτωση που θα εξεταστεί θα γίνει και ιδιαίτερη αναφορά στις διαφορές που παρουσιάζονται στην επίλυση ανάλογα με τη χρήση του Υβριδικού σχήματος έναντι διαφόρισης ή του BSOU. Ο αριθμός Reynolds ορίζεται με βάση την ταχύτητα κίνησης

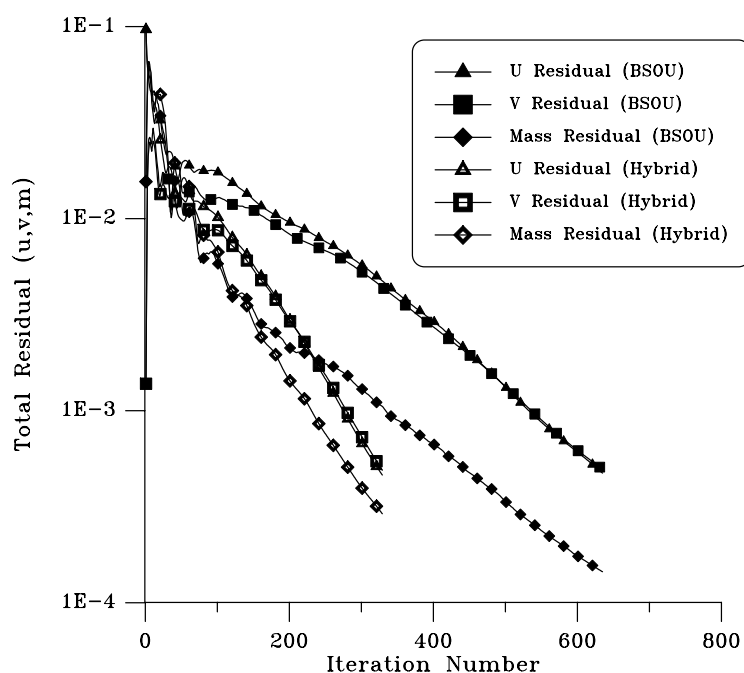
του άνω ορίου (U_{wall}) και της πλευράς της ορθογωνικής κοιλότητας (H). Εδώ θα εξεταστεί η περίπτωση όπου $Re=1000$ η οποία εξετάστηκε αριθμητικά και από τους Ghia et al. (1982) με τη μέθοδο των πολυπλεγμάτων. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται είναι 50×50 , ομοιόμορφο και φαίνεται στο Σχήμα 4.10.1.



Σχήμα 4.10.1 Υπολογιστικό πλέγμα 50×50 που χρησιμοποιείται για την επίλυση στρωτής ροής σε ορθογωνική κοιλότητα.

Ανάλογα με το σχήμα ανάντι διαφόρισης που χρησιμοποιείται υπάρχει και διαφορετική συμπεριφορά κατά την σύγκλιση του αλγορίθμου. Χρησιμοποιώντας το BSOU το οποίο είναι και μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας (2^{15} τάξης) η σύγκλιση καθυστερεί λίγο ως προς τον αριθμό των απαιτούμενων επαναλήψεων σε σύγκριση με την χρήση του Υβριδικού σχήματος. Οι συντελεστές υποχαλάρωσης τέθηκαν σε 0.5 για τις ταχύτητες και 0.3 για την πίεση και στις δύο περιπτώσεις ενώ για κριτήριο σύγκλισης ελήφθη το 0.05% του $\rho H U_{wall}^2$ το οποίο αντικαθιστά (μάλλον αυθαίρετα) την παροχή εισόδου. Αυτό το κριτήριο είναι απαραίτητο μιας και στη περίπτωση της ορθογωνικής κοιλότητας δεν έχουμε είσοδο κάποιου μεγέθους στο χώρο και επομένως είναι δύσκολο να οριστεί η παροχή εισόδου του μεγέθους, η οποία συνηθίζεται να χρησιμοποιείται για τον ορισμό των υπολοίπων και της σύγκλισης. Πάντως πρέπει να σημειωθεί ότι με το κριτήριο αυτό, υπήρχαν σημαντικές διαφορές από 0.5% σε 0.05% ενώ από εκεί και κάτω οι διαφορές στα αποτελέσματα ήταν μηδαμινές. Η

πορεία της σύγκλισης για τις δύο περιπτώσεις φαίνεται στο Σχήμα 4.10.2 όπου είναι εμφανής η καθυστέρηση στη σύγκλιση που επιφέρει το μεγαλύτερης ακρίβειας σχήμα BSOU.

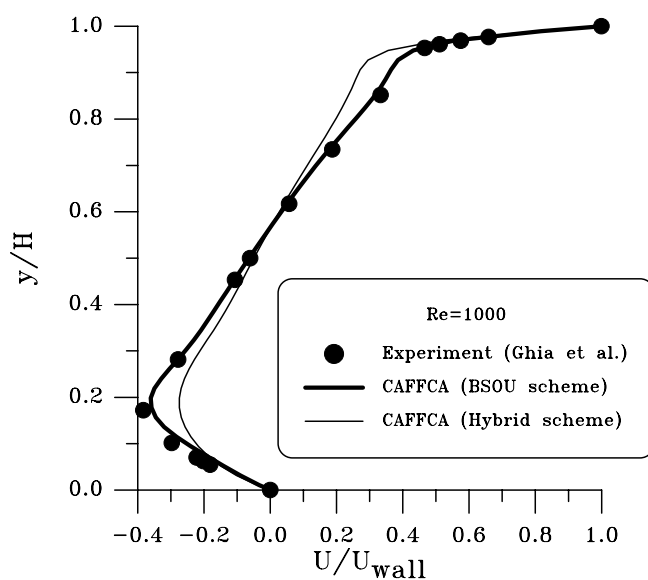


Σχήμα 4.10.2 Ρυθμοί σύγκλισης των εξισώσεων με τη χρήση των δύο σχημάτων ανάντι διαφορίσης BSOU και Υβριδικό.

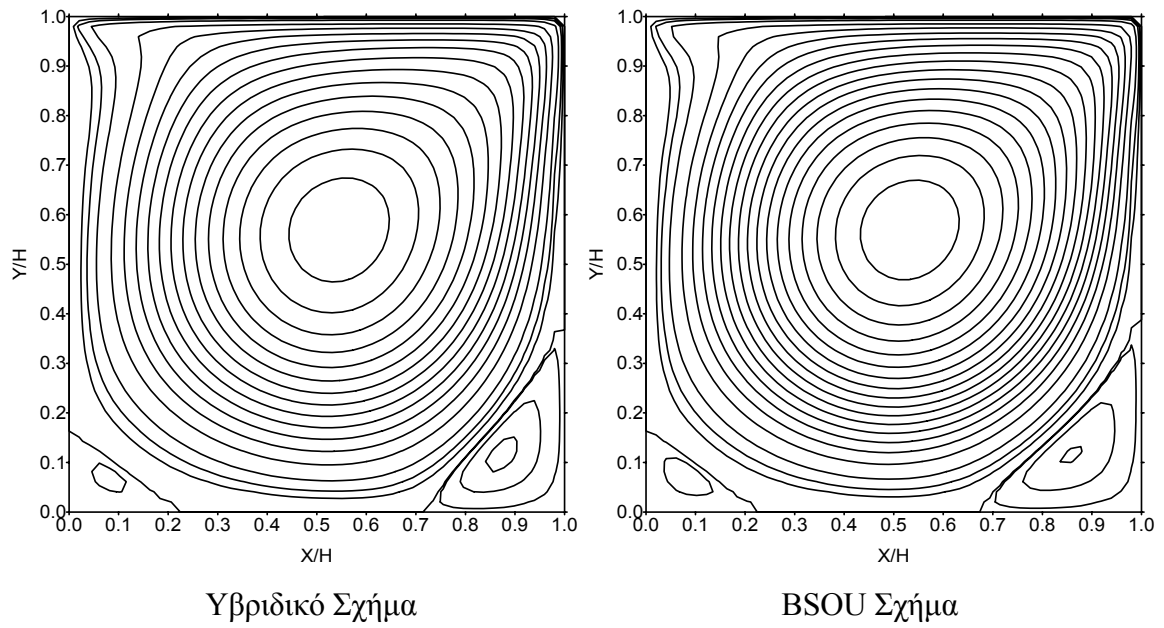
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα δύο σχήματα ανάντι διαφορίσης συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των Ghia et al. (1982) στο Σχήμα 4.10.3. Φαίνεται ότι η μεγαλύτερη τάξη ακρίβειας του BSOU σχήματος έχει σημαντική επίδραση στα αποτελέσματα για το συγκεκριμένο πλέγμα και για τη συγκεκριμένη ροή. Οι επί πλέον επαναλήψεις στη σύγκλιση δικαιολογούνται λοιπόν από την βελτίωση των αποτελεσμάτων. Πάντως θα πρέπει κανείς να είναι προσεκτικός στην εξαγωγή συμπερασμάτων, για παράδειγμα σε $Re=100$ οι διαφορές στα αποτελέσματα είναι πολύ μικρότερες ενώ για $Re=1000$ αλλά με πυκνότερο πλέγμα (π.χ. 80×80) και πάλι οι διαφορές είναι μικρές. Οι πειραματισμοί αυτοί συνιστώνται ως πολύ καλή εξάσκηση για τον αναγνώστη.

Οι γραμμές ροής που προκύπτουν από τις δύο λύσεις φαίνονται στο Σχήμα 4.10.4 όπου διακρίνεται η κύρια ανακυκλοφορία στο κέντρο της κοιλότητας καθώς και δύο μικρότερες στις δύο κάτω γωνίες. Οι δύο μικρότερες ανακυκλοφορίες έχουν αντίθετη φορά περιστροφής από την κεντρική. Έχουν σχεδιαστεί οι ίδιες τιμές των γραμμών και για τα δύο

σχήματα για να είναι άμεσα συγκρίσιμα και ενώ οι κυριότερες διαφορές φαίνονται στις γωνιακές ανακυκλοφορίες, από το Σχήμα 4.10.3 φαίνεται πιο καθαρά ότι υπάρχουν διαφορές και στην κεντρική.



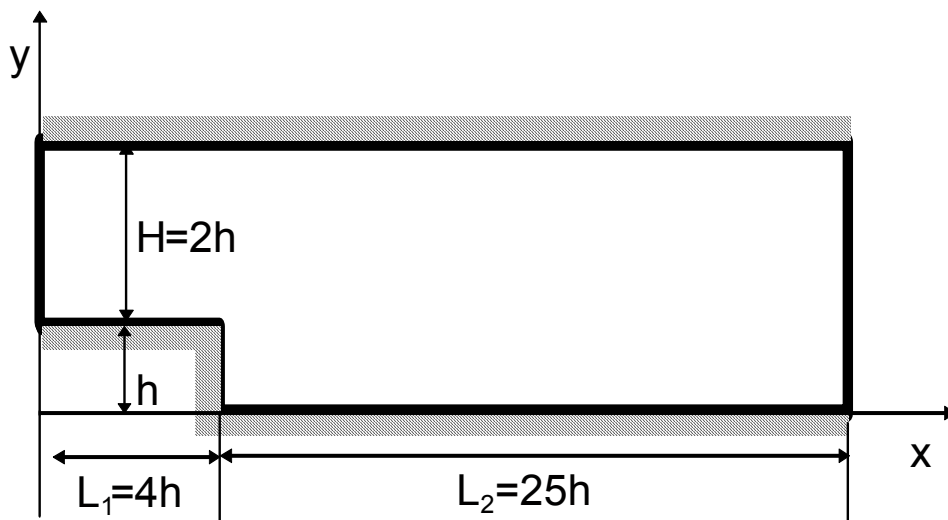
Σχήμα 4.10.3 Διανομή οριζόντιας ταχύτητας (U στη κατεύθυνση x) σε κάθετη διατομή στο μέσο της κοιλότητας ($X/H=0.5$).



Σχήμα 4.10.4 Γραμμές ροής σε ορθογωνική κοιλότητα ($Re=1000$) με χρήση των δύο σχημάτων ανάντι διαφόρισης BSOU και Υβριδικό. Υπάρχει ακριβής αντιστοιχία των γραμμών ροής στα δύο σχήματα για σύγκριση αποτελεσμάτων.

4.11 ΣΤΡΩΤΗ ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΣΚΑΛΟΠΑΤΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ

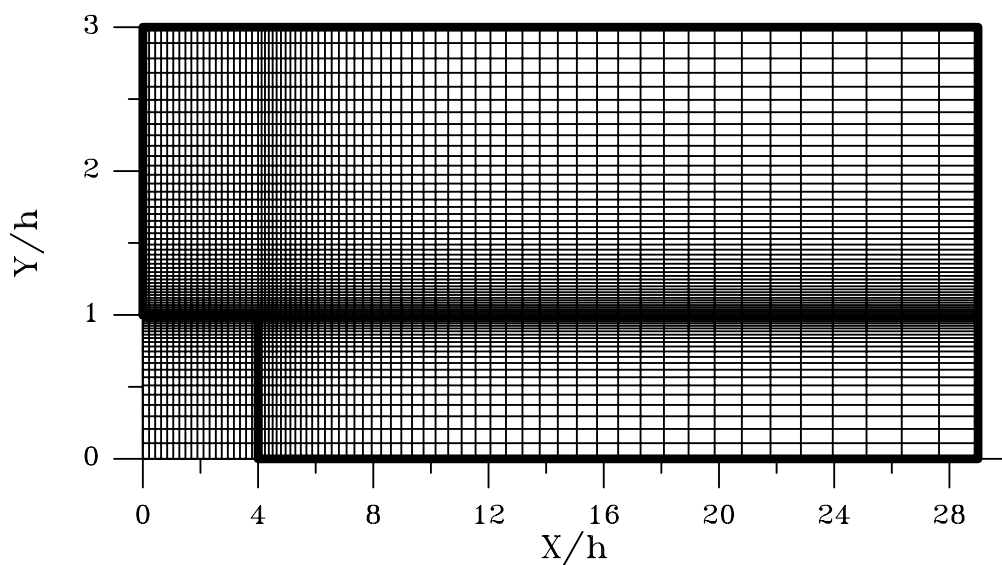
Η ροή πάνω από σκαλοπάτι έχει την ιδιαιτερότητα να εμφανίζει μια αναγκαστική αποκόλληση από την γωνία του σκαλοπατιού κάτω από την οποία εμφανίζεται αναστροφή της ροής (ανακυκλοφορία) στην οποία παγιδεύεται κάποια ποσότητα ρευστού. Το πρόβλημα έχει μελετηθεί πειραματικά από τους Denham and Patrick (1974) και η γεωμετρία (2-D καρτεσιανή) φαίνεται στο Σχήμα 4.11.1.



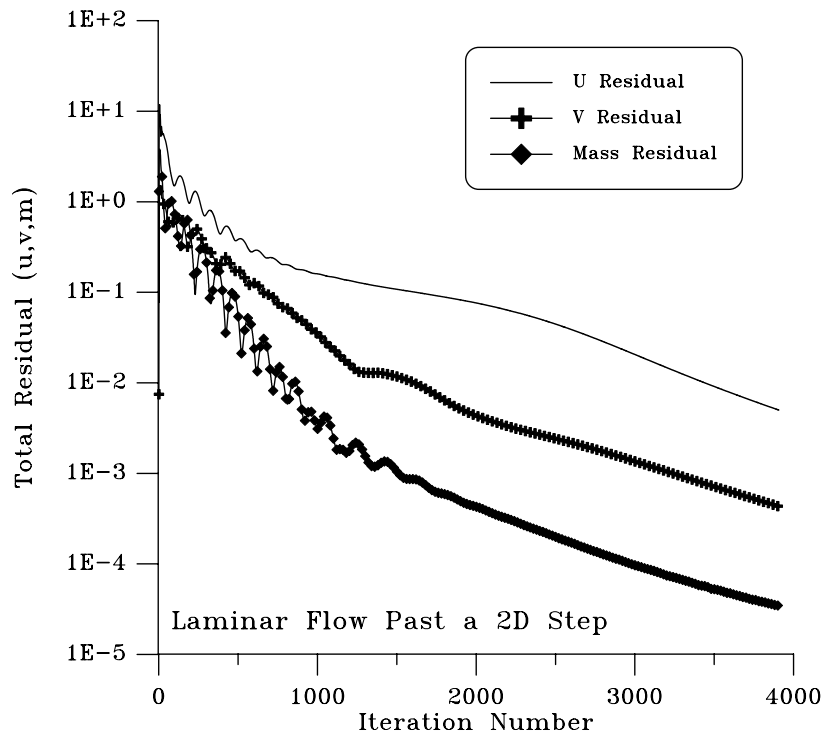
Σχήμα 4.11.1 Προς επίλυση γεωμετρία σκαλοπατιού ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες.

Ο αριθμός Reynolds στον οποίο μελετήθηκε η ροή ήταν $Re=U_0h/\nu=229$ κατατάσσοντας την ροή στη στρωτή περιοχή. Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση ήταν 70×70 με τοπική πύκνωση στη περιοχή της γωνίας του σκαλοπατιού (Σχήμα 4.11.2). Η γεωμετρία του σκαλοπατιού ορίστηκε θέτοντας $(X1,Y1)=(0,0)$, $(X2,Y2)=(0.1524,0.0381)$ και $(IW1,JW1)=(0,0)$, $(IW2,JW2)=(20,25)$. Προφανώς φαίνεται από τα $X2,Y2$ ότι είναι $h=0.0381$ m. Κατά την επίλυση οι συντελεστές υποχαλάρωσης ήταν 0.3 για τις ταχύτητες και 0.1 για τη πίεση και η σύγκλιση ακολουθεί τον ρυθμό που φαίνεται στο Σχήμα 4.11.3. Σημειώνεται ότι η διανομή της ταχύτητας στην είσοδο είχε μετρηθεί από τους Denham and Patrick (1974) και αυτή χρησιμοποιήθηκε κατά την εκτέλεση του προγράμματος (έχει δοθεί στο αντίστοιχο CTINPUT).

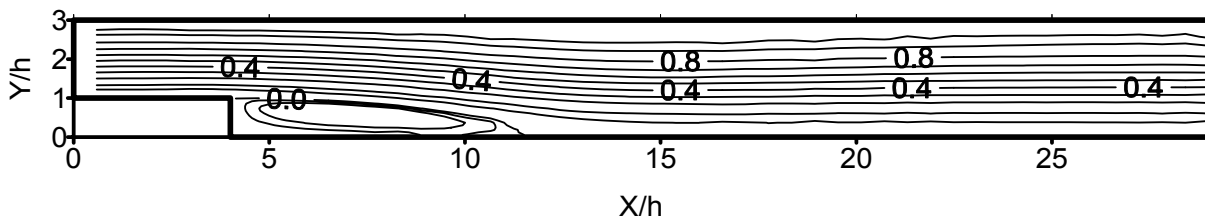
Οι γραμμές ροής του πεδίου, καθώς και τα διανύσματα ταχυτήτων στη περιοχή της ανακυκλοφορίας φαίνονται στο Σχήμα 4.11.4 και στο Σχήμα 4.11.5. Μια πιο λεπτομερής σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις πειραματικές μετρήσεις γίνεται για τις διανομές της κύριας ταχύτητας στη x κατεύθυνση σε διάφορες διατομές της γεωμετρίας στο Σχήμα 4.11.6. Είναι φανερό ότι η σύγκριση είναι πολύ καλή ακόμη και στις περιοχές όπου επικρατεί η ανακυκλοφορία. Μεγάλη σημασία στην ποιότητα των αποτελεσμάτων παίζει το υπολογιστικό πλέγμα. Η πυκνωση στην περιοχή της γωνίας είναι απαραίτητη ενώ αν τηρείται αυτός ο κανόνας, τότε τα αποτελέσματα και με αραιότερο πλέγμα 50×50 έχουν πολύ μικρές αποκλίσεις από αυτά που παρουσιάζονται.



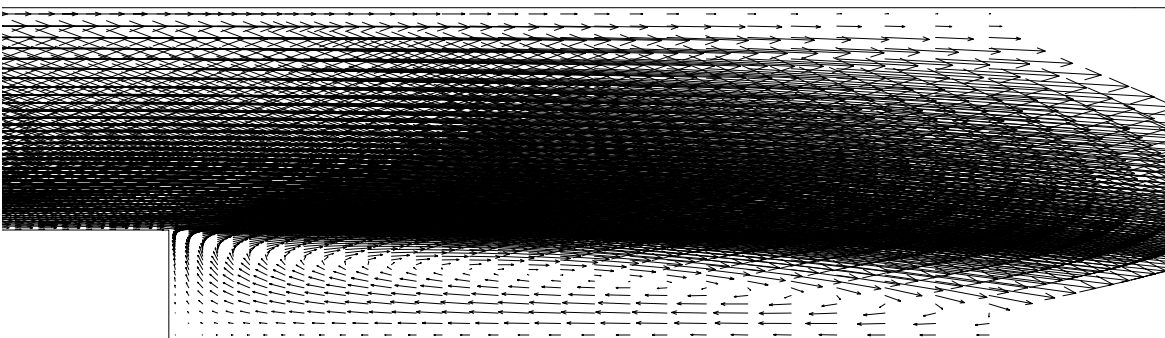
Σχήμα 4.11.2 Υπολογιστικό πλέγμα 70×70 που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση.



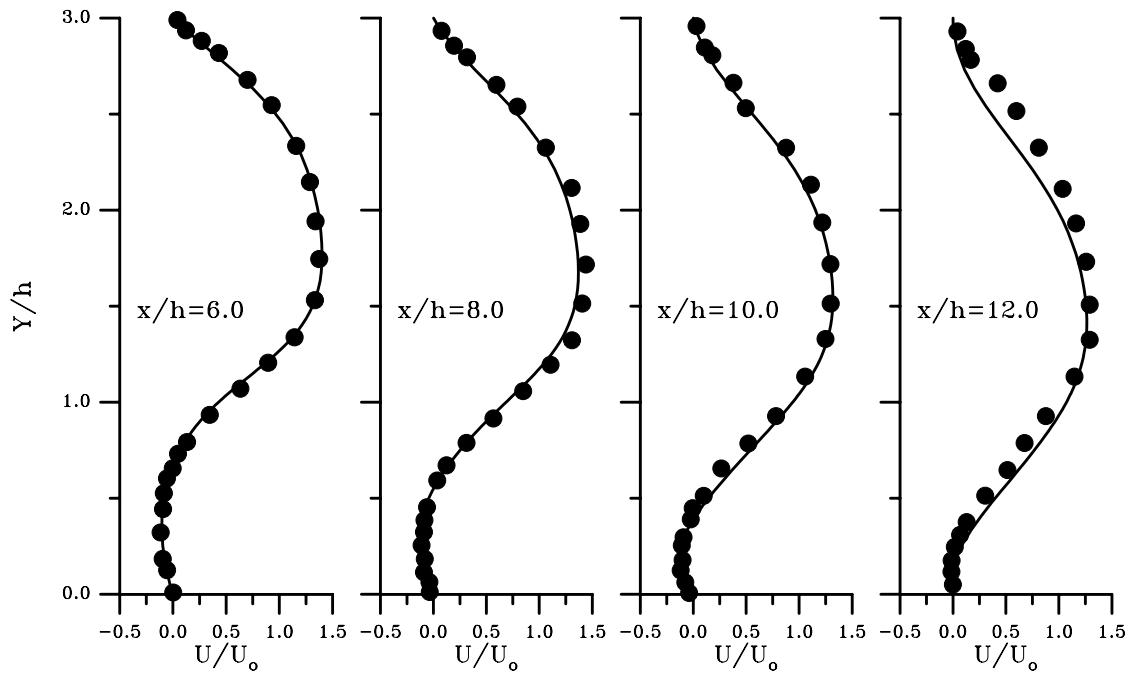
Σχήμα 4.11.3 Ρυθμός σύγκλισης των εξισώσεων.



Σχήμα 4.11.4 Γραμμές ροής για την στρωτή ροή πάνω από σκαλοπάτι και ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες. ($Re=229$)



Σχήμα 4.11.5 Διανύσματα ταχυτήτων στη περιοχή της ανακυκλοφορίας.

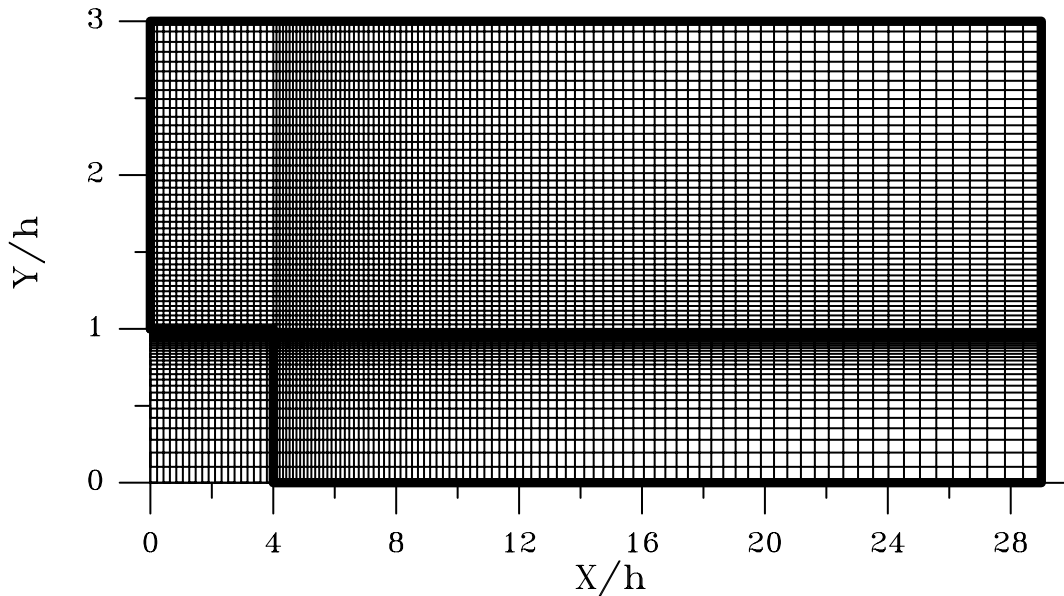


Σχήμα 4.11.6 Διανομές της κύριας ταχύτητας της ροής σε τέσσερις διαφορετικές εγκάρσιες διατομές (——) και σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα των Denham and Patrick (1974) (•••).

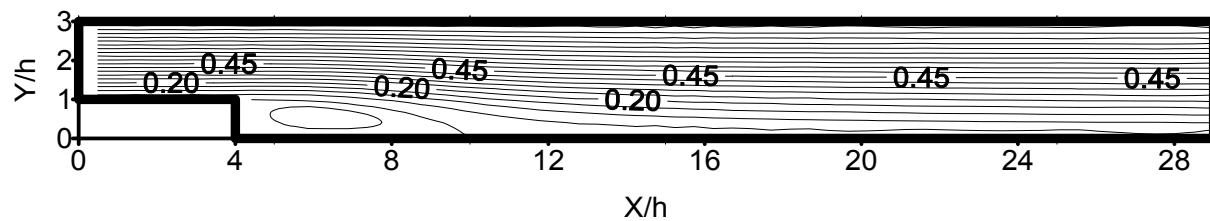
4.12 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΣΚΑΛΟΠΑΤΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΠΛΑΚΕΣ

Την ίδια γεωμετρία με του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά σε τυρβώδη ροή, μελέτησαν πειραματικά οι Kim et al. (1980). Ο αριθμός Reynolds ήταν $Re = U_0 h / \nu = 69100$ και οι μετρήσεις ήταν πιο λεπτομερείς. Εδώ, εκτός από τις διανομές των μέσων ταχυτήτων δίνονται και οι διανομές της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (k) καθώς και η διανομή της πίεσης στο νότιο τοίχωμα μετά το σκαλοπάτι. Είναι ενδιαφέρουσα η σύγκριση και με άλλες μεθοδολογίες και έτσι στα διαγράμματα που ακολουθούν τα αποτελέσματα του υπολογισμού συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα των Kim et al. (1980) αλλά και με τους υπολογισμούς του Sohn (1988) ο οποίος αντιμετώπισε την ίδια περίπτωση αλλά με έναν αλγόριθμο πεπερασμένων στοιχείων. Τέλος αναφέρεται ότι το μήκος της ανακυκλοφορίας δίνεται από τα πειράματα ως $X_L = (6-8) \cdot h$. Ο Sohn (1988) υπολόγισε $X_L = 5.59 \cdot h$ ενώ ο υπολογισμός που παρουσιάζεται έδωσε $X_L = 6 \cdot h$. Σημειώνεται ότι το πλέγμα εδώ έγινε 110×80 λόγω της μεγαλύτερης διακριτοποίησης που απαιτείται στην τυρβώδη ροή (Σχήμα

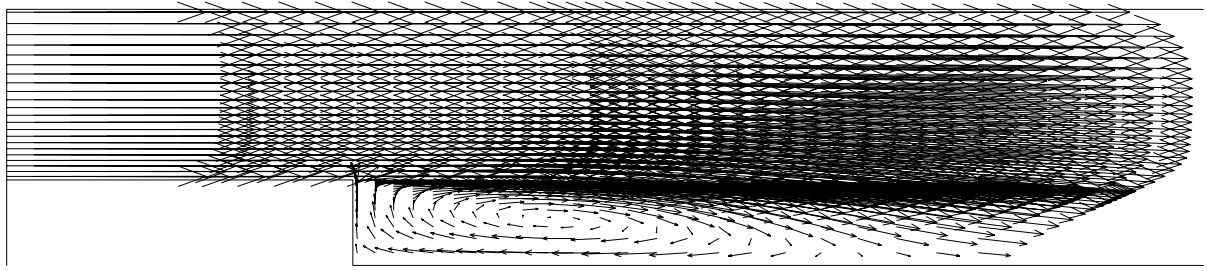
4.12.1.). Και εδώ είχε δοθεί η διανομή της ταχύτητας στην είσοδο του υπολογιστικού χώρου και χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς. Για την τυρβώδη κινητική ενέργεια θεωρήθηκε ότι $k(y)=0.003U(y)^2$ σε κάθε θέση της εισόδου. Η τιμή 0.003 ήταν αρκετά κοντά στο επίπεδο τύρβης που είχε μετρηθεί.



Σχήμα 4.12.1 Υπολογιστικό πλέγμα 110x80 που χρησιμοποιήθηκε στους υπολογισμούς.

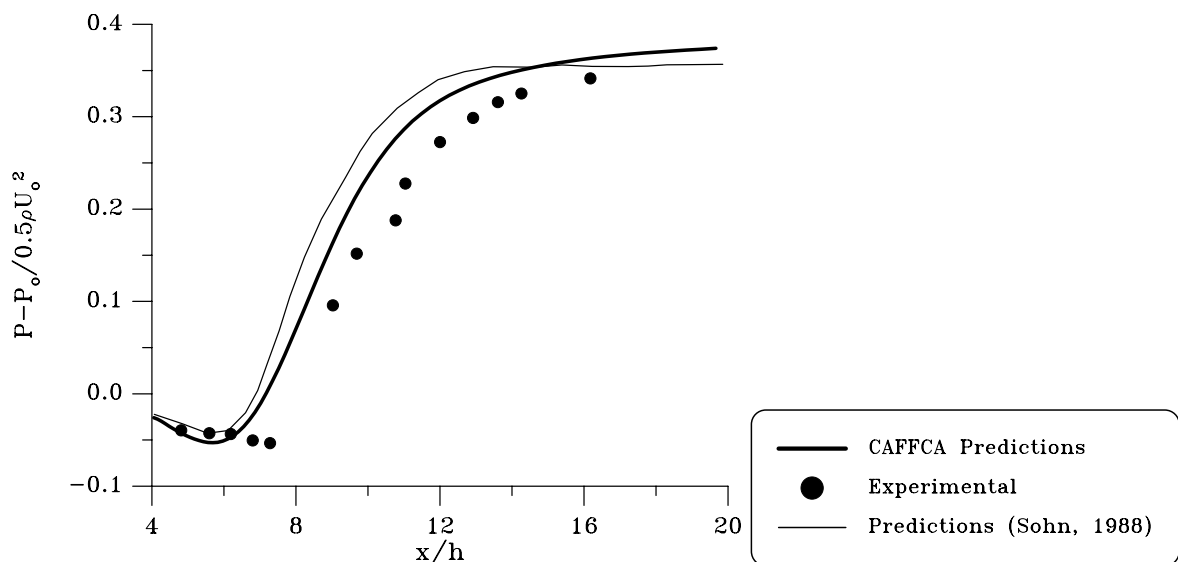


Σχήμα 4.12.2 Γραμμές ροής πάνω από σκαλοπάτι ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες. Τυρβώδης ροή, $Re=69100$.

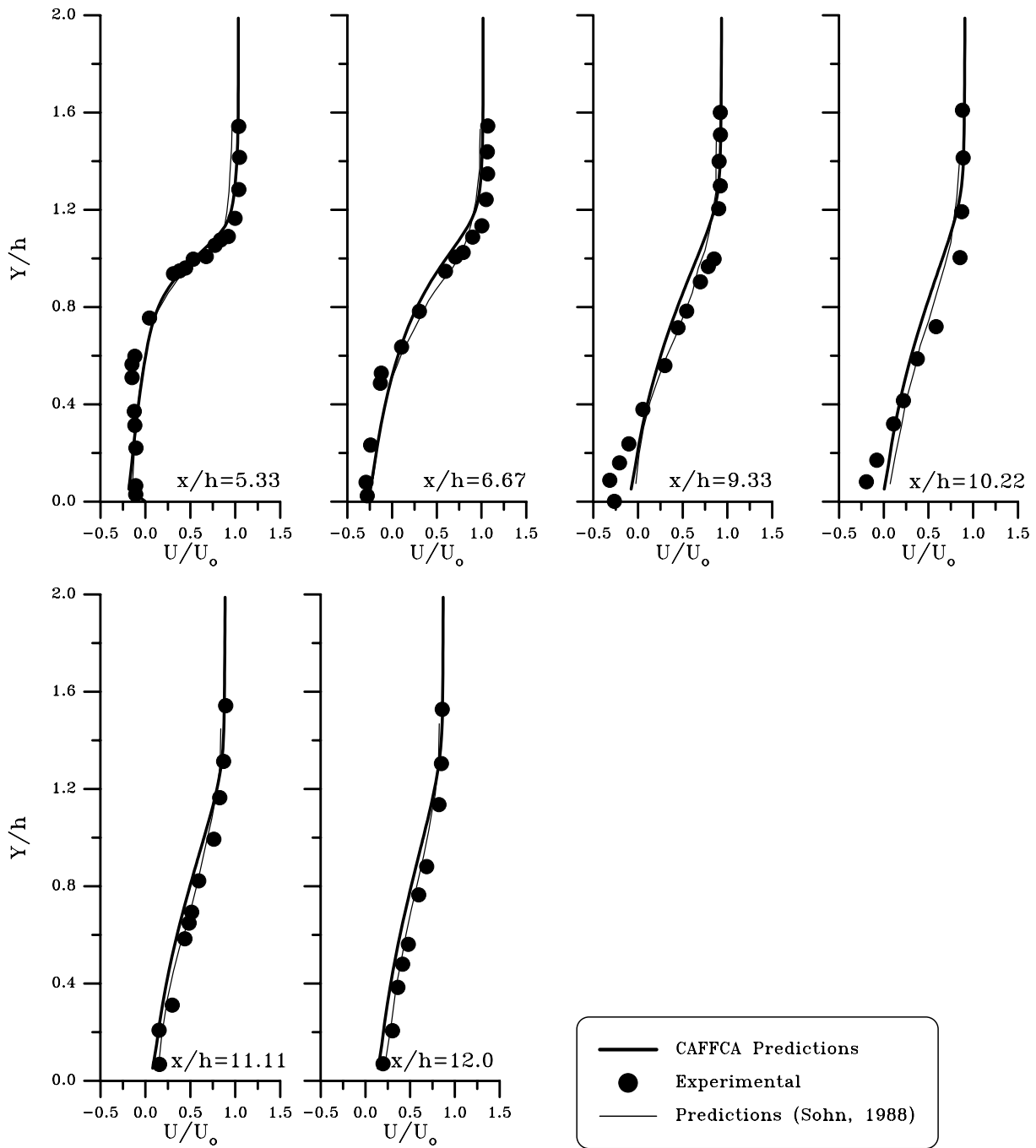


Σχήμα 4.12.3 Διανύσματα ταχυτήτων για την τυρβώδη ροή πάνω από σκαλοπάτι ανάμεσα σε παράλληλες πλάκες. Τα διανύσματα έχουν σχεδιαστεί ανά δύο γραμμές πλέγματος.

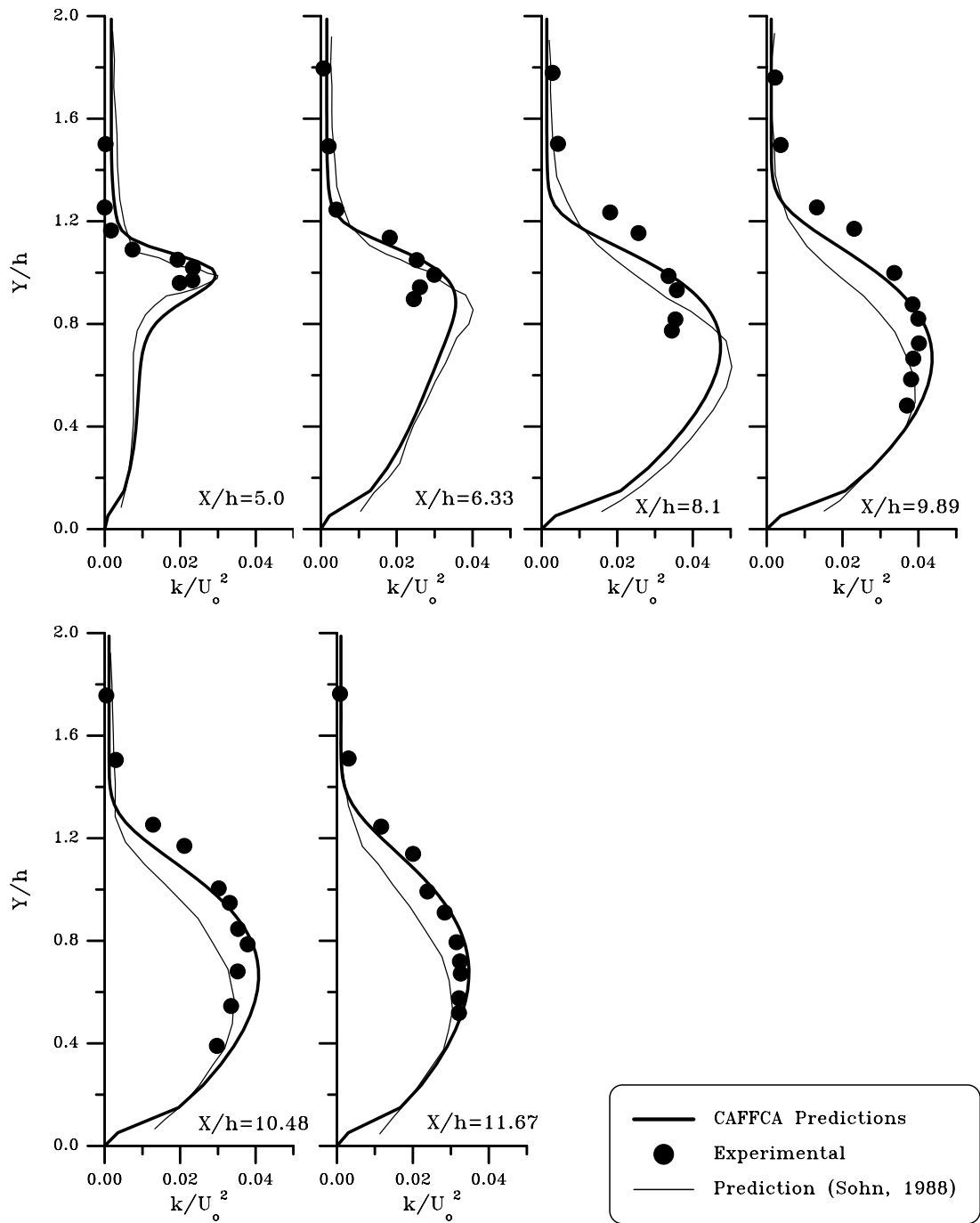
Οι γραμμές ροής και τα διανύσματα ταχυτήτων φαίνονται στο Σχήμα 4.12.2 και Σχήμα 4.12.3 αντίστοιχα απ'όπου διακρίνεται και το μήκος της ανακυκλοφορίας. Στη συνέχεια θα γίνουν οι συγκρίσεις με τις πειραματικά μετρημένες διανομές.



Σχήμα 4.12.4 Διανομή πίεσης στο νότιο τοίχωμα τυρβώδους ροής πάνω από σκαλοπάτι.



Σχήμα 4.12.5 Διανομές αξονικών ταχυτήτων σε διάφορες διατομές για τη τυρβώδη ροή πάνω από σκαλοπάτι. Συγκρίσεις με πειραματικές μετρήσεις και άλλους υπολογισμούς.



Σχήμα 4.12.6 Διανομές τυρβώδους κινητικής ενέργειας σε διάφορες διατομές για τη τυρβώδη ροή πάνω από σκαλοπάτι. Συγκρίσεις με πειραματικές μετρήσεις και άλλους υπολογισμούς.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson D., Tannehill J. and Pletcher R. (1984) Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corp.

Denham M. K. and Patrick M. A. (1974) Laminar Flow Over a Downstream Facing Step in a Two Dimensional Flow Channel. Trans. Inst. Chem. Engrs., Vol. 52, pp. 361-367

Ghia U., Ghia K., Shin C. (1982) High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier Stokes Equations and a Multigrid Method. Journal of Computatonal Physics. Vol. 48. pp. 387-411.

Hinze J.O. (1975) Turbulence. McGraw Hill.

Hirsch C. (1990) Numerical Computation of Internal and External Flows, vols. 1&2, J. Wiley Publ.

Lesieur M. (1990) Turbulence in Fluids - Stochastic and Numerical Modelling. Ed. Moreau R. Kluwer Academic Publishers.

Lien F S. and Leschziner M. A. (1991) Multigrid Convergence Acceleration for Complex Flow Including Turbulence. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 98, pp. 277-288.

Lilley D. G. and Rhode D. L. (1982) A Computer Code for Swirling Turbulent Axisymmetric Recirculating Flows in Practical Isothermal Combustor Geometries NASA Contractor Report 3442.

Majumdar S. (1988) Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with non Staggered Grids. Numerical Heat Transfer, Vol. 13, p. 125.

Miller T.F. and Schmidt F.W. (1988) Use of Pressure Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier Stokes Equations on a non Staggerd Grid System. Numerical Heat Transfer, Vol. 14, p. 213.

Papadakis G. and Bergeles G. (1995) A Locally Modified Second Order Upwind Scheme for Convection Terms Discretisation.. Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow, Vol. 5, pp. 49-62.

Patankar S.V. and Spalding D.B. (1972) A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows. Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 15, No. 10, pp. 1787.

Rhie C. M. and Chow W. I. (1983) Numerical Study of Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation AIAA Journal, Vol. 21, pp. 1525-1532

Sohn J. L. (1988) Evaluation of Fidap on Some Classical Laminar and Turbulent Benchmarks Int. J. Num. Meth. in Fluids, Vol. 8, pp. 1469.

Tennekes H. and Lumley J.L. (1972) A First Course in Turbulence. M.I.T. Press.

Kim J., Kline S. J. and Johnston J. p. (1980) Investigation of a Reattaching Turbulent Shear Layer : Flow Over a Backward Facing Step J. Fluids Eng., Vol. 102, pp. 302

Μπεργελές Γ. Χρ. (1994) Υπολογιστική Ρευστομηχανική, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.

6. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΡΧΕΙΑ ΕΙΣΟΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (CTINPUT)

EXERCISE NUMBER

1

1-D HEAT TRANSFER (STEADY STATE)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.010000		YTOT
0.200000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
2	IBOUNDN	
2	IBOUNDS	
1	IBOUNDE	
1	IBOUNDW	
F	INCALU	
F	INCALV	
F	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.000000		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
273.000000		TWE
300.000000		TWW
0.200000		RLENGTH
0.893300E+04		DENSITY
0.401000E+03		VISCOSITY £
385.000000		PRANDTL NUMBER
0.385000E+03		CP
0.500000E+30		TIME STEP
100		MAXIT

20000	MXTIMIT	
20000	MXITSTP	
0.600000E+30		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
1.000000		URFU
1.000000		URFV
1.000000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE
1.000000		URFT
1.000000		URFVIS
0.500000E-02		SORMAX
50000	INDPRI	
0	KINTRM	
100	ISAVE	
100	ISVDT	
0	U INLET PROFILE	
0	V INLET PROFILE	
0	k INLET PROFILE	
0.000000	INIT. U-VEL	DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL	DISTR.
300.000000	INIT. TEMP.	DISTR.
0	# OF INTERM.	SAVINGS
0.000000		UNORTH
0.000000		USOUTH
0.000000		VWEST
0.000000		VEAST
0.000000	U-NORTH	FREQ.
0.000000	U-SOUTH	FREQ.
0.000000	U-WEST	FREQ.
0.000000	U-EAST	FREQ.

EXERCISE NUMBER

2

1-D HEAT TRANSFER (TIME DEPENDENT PROBLEM)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.010000		YTOT
0.200000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
2	IBOUNDN	
2	IBOUNDS	
1	IBOUNDE	
1	IBOUNDW	
F	INCALU	
F	INCALV	
F	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.000000		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
273.000000		TWE
300.000000		TWW
0.200000		RLENGTH
0.893300E+04		DENSITY
0.401000E+03		VISCOSITY £
385.000000		PRANDTL NUMBER
0.385000E+03		CP
0.100000E+01		TIME STEP
1000		MAXIT
5		MXTIMIT
0		MXITSTP
0.201000E+03		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
1.000000		URFU
1.000000		URFV
1.000000		URFP
1.000000		URFK

1.000000	URFE		
1.000000	URFT		
1.000000	URFVIS		
0.500000E-03	SORMAX		
50000	INDPRI		
0	KINTRM		
100	ISAVE		
100	ISVDT		
0	U INLET PROFILE		
0	V INLET PROFILE		
0	k INLET PROFILE		
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.		
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.		
300.000000	INIT. TEMP. DISTR.		
5	# OF INTERM. SAVINGS		
10.0000	50.0000	100.000	150.000
200.000			
0.000000	UNORTH		
0.000000	USOUTH		
0.000000	VWEST		
0.000000	VEAST		
0.000000	U-NORTH FREQ.		
0.000000	U-SOUTH FREQ.		
0.000000	U-WEST FREQ.		
0.000000	U-EAST FREQ.		

EXERCISE NUMBER

3

2-D HEAT TRANSFER (STEADY STATE)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.100000		YTOT
0.100000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
2	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
1	IBOUNDE	
2	IBOUNDW	
F	INCALU	
F	INCALV	
F	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.000000		UIN
373.000000		TWN
368.000000		TWS
378.000000		TWE
373.000000		TWW
0.100000		RLENGTH
0.893300E+04		DENSITY
0.401000E+03		VISCOSITY £
385.000000		PRANDTL NUMBER
0.385000E+03		CP
0.100000E+30		TIME STEP
150		MAXIT
20000		MXTIMIT
20000		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
1.000000		URFU
1.000000		URFV
1.000000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000	URFT
1.000000	URFVIS
0.500000E-02	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
100	ISVDT
0	U INLET PROFILE
0	V INLET PROFILE
0	k INLET PROFILE
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
373.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

4

2-D HEAT TRANSFER (TIME DEPENDENT PROBLEM)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.100000		YTOT
0.100000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
2	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
1	IBOUNDE	
2	IBOUNDW	
F	INCALU	
F	INCALV	
F	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.000000		UIN
373.000000		TWN
368.000000		TWS
378.000000		TWE
373.000000		TWW
0.100000		RLENGTH
0.893300E+04		DENSITY
0.401000E+03		VISCOSITY £
385.000000		PRANDTL NUMBER
0.385000E+03		CP
0.500000E+00		TIME STEP
150		MAXIT
30		MXTIMIT
0		MXITSTP
0.151000E+02		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
1.000000		URFU
1.000000		URFV
1.000000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000	URFT		
1.000000	URFVIS		
0.500000E-02	SORMAX		
50000	INDPRI		
0	KINTRM		
100	ISAVE		
100	ISVDT		
0	U INLET PROFILE		
0	V INLET PROFILE		
0	k INLET PROFILE		
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.		
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.		
373.000000	INIT. TEMP. DISTR.		
5	# OF INTERM. SAVINGS		
4.00000	8.00000	12.0000	16.0000
30.0000			
0.000000	UNORTH		
0.000000	USOUTH		
0.000000	VWEST		
0.000000	VEAST		
0.000000	U-NORTH FREQ.		
0.000000	U-SOUTH FREQ.		
0.000000	U-WEST FREQ.		
0.000000	U-EAST FREQ.		

EXERCISE NUMBER

5

FLOW BETWEEN TWO HEATED PLATES

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.200000		YTOT
4.000000		XTOT
1.000001		EXPY
1.000001		EXPYW
1.000001		EXPX
1.000001		EXPXW
1	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.031000		UIN
323.000000		TWN
323.000000		TWS
0.000000		TWE
300.000000		TWW
0.400000		RLENGTH
0.116140E+01		DENSITY
0.184600E-04		VISCOSITY £
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+04		CP
0.100000E+30		TIME STEP
20000		MAXIT
20000		MXTIMIT
20000		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.500000		URFU
0.500000		URFV
0.300000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

0.500000	URFT
1.000000	URFVIS
0.500000E-02	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
100	ISVDT
2	U INLET PROFILE
0.100000E+01	0.0000000
0.100000E+01	1.0000000
2	V INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	1.0000000
0	k INLET PROFILE
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

6

FLOW IN AN AXISYMMETRIC PIPE WITH HEATED WALLS

0	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.100000		YTOT
4.000000		XTOT
1.000001		EXPY
1.000001		EXPYW
1.000001		EXPX
1.000001		EXPXW
1	IBOUNDN	
2	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
F	INCALCON	
0.031000		UIN
323.000000		TWN
323.000000		TWS
0.000000		TWE
300.000000		TWW
0.200000		RLENGTH
0.116140E+01		DENSITY
0.184600E-04		VISCOSITY £
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+04		CP
0.100000E+30		TIME STEP
20000		MAXIT
20000		MXTIMIT
20000		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.500000		URFU
0.500000		URFV
0.300000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

0.500000	URFT
1.000000	URFVIS
0.500000E-02	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
100	ISVDT
2	U INLET PROFILE
0.100000E+01	0.0000000
0.100000E+01	1.0000000
2	V INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	1.0000000
0	k INLET PROFILE
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

7

FLOW IN A TRANSVERSE SECTION OF A RECTANGULAR PIPE

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.100000		YTOT
0.100000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
2	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
2	IBOUNDE	
1	IBOUNDW	
F	INCALU	
F	INCALV	
F	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
T	INCALT	
T	INCALCON	
0.000000		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
0.200000		RLENGTH
0.116140E+01		DENSITY
0.186400E-04		VISCOSITY £
1.000000		PRANDTL NUMBER
0.100000E+01		CP
0.100000E+33		TIME STEP
250		MAXIT
10000		MXTIMIT
10000		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.001000	SOURCE TERM	VALUE
1.000000		URFU
1.000000		URFV
1.000000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000	URFT
1.000000	URFVIS
0.100000E-09	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
10000	ISVDT
0	U INLET PROFILE
0	V INLET PROFILE
0	k INLET PROFILE
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

8

LAMINAR SHEAR LAYER

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.100000		YTOT
10.000000		XTOT
1.000001		EXPY
1.000001		EXPYW
1.000001		EXPX
1.000001		EXPXW
2	IBOUNDN	
2	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
F	INCALT	
F	INCALCON	
0.000100		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
0.100000		RLENGTH
0.998300E+03		DENSITY
0.102000E-03		VISCOSITY £
7.030000		PRANDTL NUMBER
0.418700E+04		CP
0.100000E+30		TIME STEP
3000		MAXIT
15700		MXTIMIT
15700		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.300000		URFU
0.300000		URFV
0.100000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000	URFT
1.000000	URFVIS
0.500000E-02	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
100	ISVDT
10	U INLET PROFILE
0.100000E+01	0.0000000
0.100000E+01	0.1100000
0.100000E+01	0.2200000
0.100000E+01	0.3300000
0.100000E+01	0.4999900
0.500000E+00	0.5000100
0.500000E+00	0.6700000
0.500000E+00	0.7800000
0.500000E+00	0.8900000
0.500000E+00	1.0000000
2	V INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	1.0000000
3	k INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	0.5000000
0.000000E+00	1.0000000
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

9

VIBRATING PLATE (STOKES 2ND PROBLEM)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
3.000000		YTOT
4.000000		XTOT
0.900010		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
3	IBOUNDN	
4	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
3	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
F	INCALT	
F	INCALCON	
0.500000		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
4.000000		RLENGTH
0.116140E+01		DENSITY
0.184600E-04		VISCOSITY ϵ
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+00		CP
0.100000E+01		TIME STEP
10000		MAXIT
1000		MXTIMIT
0		MXITSTP
0.130100E+02		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.300000		URFU
0.300000		URFV
0.100000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000		URFT	
1.000000		URFVIS	
0.500000E-02		SORMAX	
50000		INDPRI	
0		KINTRM	
1001		ISAVE	
50000		ISVDT	
0	U	INLET PROFILE	
0	V	INLET PROFILE	
0	k	INLET PROFILE	
0.000000	INIT.	U-VEL DISTR.	
0.000000	INIT.	V-VEL DISTR.	
0.000000	INIT.	TEMP. DISTR.	
6	#	OF INTERM. SAVINGS	
2.00000	4.00000	7.00000	10.0000
12.0000			
13.0000			
0.000000		UNORTH	
0.500000		USOUTH	
0.000000		VWEST	
0.000000		VEAST	
0.000000	U-NORTH	FREQ.	
0.079600	U-SOUTH	FREQ.	
0.000000	U-WEST	FREQ.	
0.000000	U-EAST	FREQ.	

EXERCISE NUMBER

10

FLOW IN A SQUARE CAVITY (MOVING TOP BOUNDARY)

1	INDCOS	
1	JW1	
1	JW2	
1	IW1	
1	IW2	
0.000000		Y1
0.000000		Y2
0.000000		X1
0.000000		X2
0.200000		YTOT
0.200000		XTOT
1.000100		EXPY
1.000100		EXPYW
1.000100		EXPX
1.000100		EXPXW
4	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
1	IBOUNDE	
1	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
F	INCALT	
F	INCALCON	
0.079473		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
0.200000		RLENGTH
0.116140E+01		DENSITY
0.184600E-04		VISCOSITY £
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+04		CP
0.100000E+32		TIME STEP
10000		MAXIT
10000		MXTIMIT
0		MXITSTP
0.101000E+32		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.500000		URFU
0.500000		URFV
0.300000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

1.000000	URFT
1.000000	URFVIS
0.500000E-03	SORMAX
50000	INDPRI
0	KINTRM
100	ISAVE
50000	ISVDT
2	U INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	1.0000000
3	V INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	0.5000000
0.000000E+00	1.0000000
0	k INLET PROFILE
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.079473	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST
0.000000	U-NORTH FREQ.
0.000000	U-SOUTH FREQ.
0.000000	U-WEST FREQ.
0.000000	U-EAST FREQ.

EXERCISE NUMBER

11

LAMINAR FLOW PAST A STEP BETWEEN TWO PLATES

1	INDCOS	
1	JW1	
25	JW2	
1	IW1	
20	IW2	
0.000000		Y1
0.038100		Y2
0.000000		X1
0.152400		X2
0.114300		YTOT
1.104900		XTOT
0.950010		EXPY
0.900010		EXPYW
0.950010		EXPX
1.000100		EXPXW
1	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
F	INCALK	
F	INCALD	
F	INPRO	
F	IBSOU	
F	INCALT	
F	INCALCON	
0.058000		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
0.114300		RLENGTH
0.188553E+01		DENSITY
0.183698E-04		VISCOSITY μ
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+00		CP
0.100000E+30		TIME STEP
5000		MAXIT
10000		MXTIMIT
10000		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.300000		URFU
0.300000		URFV
0.100000		URFP
1.000000		URFK
1.000000		URFE

```

1.000000      URFT
1.000000      URFVIS
0.500000E-02  SORMAX
50000          INDPRI
0              KINTRM
100            ISAVE
100            ISVDT
20             U INLET PROFILE
0.000000E+00    0.3333300
0.172913E+00    0.3432700
0.290319E+00    0.3549700
0.565814E+00    0.3778200
0.788237E+00    0.4012600
0.104163E+01    0.4422500
0.127760E+01    0.4888900
0.136807E+01    0.5281700
0.137239E+01    0.5793900
0.137806E+01    0.6219700
0.135561E+01    0.6685100
0.132042E+01    0.7081900
0.126060E+01    0.7509600
0.118872E+01    0.8002300
0.103898E+01    0.8496900
0.830396E+00    0.8907800
0.517721E+00    0.9386100
0.346828E+00    0.9546200
0.146430E+00    0.9822900
0.000000E+00    1.0000000
2              V INLET PROFILE
0.000000E+00    0.0000000
0.000000E+00    1.0000000
3              k INLET PROFILE
0.000000E+00    0.0000000
0.000000E+00    0.5000000
0.000000E+00    1.0000000
0.000000      INIT. U-VEL DISTR.
0.000000      INIT. V-VEL DISTR.
0.000000      INIT. TEMP. DISTR.
0              # OF INTERM. SAVINGS

0.000000      UNORTH
0.000000      USOUTH
0.000000      VWEST
0.000000      VEAST
0.000000      U-NORTH FREQ.
0.000000      U-SOUTH FREQ.
0.000000      U-WEST FREQ.
0.000000      U-EAST FREQ.

```

EXERCISE NUMBER

12

```

*****
TURBULENT FLOW PAST A STEP BETWEEN TWO PLATES
*****

```

1	INDCOS	
1	JW1	
35	JW2	
1	IW1	
20	IW2	
0.000000		Y1
0.038100		Y2
0.000000		X1
0.152400		X2
0.114300		YTOT
1.104900		XTOT
0.980010		EXPY
0.900010		EXPYW
0.980010		EXPX
1.000100		EXPXW
1	IBOUNDN	
1	IBOUNDS	
3	IBOUNDE	
0	IBOUNDW	
T	INCALU	
T	INCALV	
T	INCALP	
T	INCALK	
T	INCALD	
T	INPRO	
F	IBSOU	
F	INCALT	
F	INCALCON	
17.799999		UIN
0.000000		TWN
0.000000		TWS
0.000000		TWE
0.000000		TWW
0.038100		RLENGTH
0.188553E+01		DENSITY
0.183698E-04		VISCOSITY £
0.707000		PRANDTL NUMBER
0.100700E+00		CP
0.100000E+30		TIME STEP
20000		MAXIT
15700		MXTIMIT
15700		MXITSTP
0.500000E+36		TMAX
0.000000	SOURCE TERM	VALUE
0.500000		URFU
0.500000		URFV
0.300000		URFP
0.500000		URFK
0.500000		URFE
1.000000		URFT
0.500000		URFVIS
0.500000E-02		SORMAX
50000	INDPRI	
0	KINTRM	

100	ISAVE
100	ISVDT
46	U INLET PROFILE
0.000000E+00	0.9876017
0.782585E+00	1.0227270
0.872819E+00	1.0681820
0.916413E+00	1.1136360
0.947092E+00	1.1590910
0.969270E+00	1.2045450
0.985073E+00	1.2500000
0.996134E+00	1.2954540
0.100385E+01	1.3409090
0.100930E+01	1.3863630
0.101323E+01	1.4318180
0.101615E+01	1.4772720
0.101835E+01	1.5227270
0.102007E+01	1.5681810
0.102142E+01	1.6136360
0.102252E+01	1.6590900
0.102343E+01	1.7045450
0.102418E+01	1.7499990
0.102482E+01	1.7954540
0.102537E+01	1.8409090
0.102584E+01	1.8863630
0.102624E+01	1.9318180
0.102659E+01	1.9772730
0.102689E+01	2.0227270
0.102714E+01	2.0681820
0.102735E+01	2.1136360
0.102752E+01	2.1590910
0.102766E+01	2.2045450
0.102775E+01	2.2500000
0.102779E+01	2.2954550
0.102777E+01	2.3409090
0.102765E+01	2.3863640
0.102739E+01	2.4318190
0.102688E+01	2.4772730
0.102596E+01	2.5227280
0.102439E+01	2.5681820
0.102177E+01	2.6136370
0.101755E+01	2.6590910
0.101091E+01	2.7045460
0.100068E+01	2.7500010
0.985470E+00	2.7954550
0.963666E+00	2.8409100
0.933193E+00	2.8863649
0.889583E+00	2.9318190
0.798271E+00	2.9772730
0.000000E+00	3.0000000
2	V INLET PROFILE
0.000000E+00	0.0000000
0.000000E+00	3.0000000
46	k INLET PROFILE
0.000000E+00	0.9876017

0.183732E-02	1.0227270
0.228544E-02	1.0681820
0.251944E-02	1.1136360
0.269095E-02	1.1590910
0.281845E-02	1.2045450
0.291111E-02	1.2500000
0.297685E-02	1.2954540
0.302314E-02	1.3409090
0.305605E-02	1.3863630
0.307993E-02	1.4318180
0.309766E-02	1.4772720
0.311113E-02	1.5227270
0.312160E-02	1.5681810
0.312992E-02	1.6136360
0.313665E-02	1.6590900
0.314221E-02	1.7045450
0.314686E-02	1.7499990
0.315079E-02	1.7954540
0.315415E-02	1.8409090
0.315703E-02	1.8863630
0.315951E-02	1.9318180
0.316164E-02	1.9772730
0.316348E-02	2.0227270
0.316504E-02	2.0681820
0.316634E-02	2.1136360
0.316740E-02	2.1590910
0.316823E-02	2.2045450
0.316880E-02	2.2500000
0.316906E-02	2.2954550
0.316893E-02	2.3409090
0.316822E-02	2.3863640
0.316659E-02	2.4318190
0.316344E-02	2.4772730
0.315780E-02	2.5227280
0.314811E-02	2.5681820
0.313206E-02	2.6136370
0.310625E-02	2.6590910
0.306580E-02	2.7045460
0.300411E-02	2.7500010
0.291345E-02	2.7954550
0.278596E-02	2.8409100
0.261255E-02	2.8863649
0.237407E-02	2.9318190
0.191171E-02	2.9772730
0.000000E+00	3.0000000
0.000000	INIT. U-VEL DISTR.
0.000000	INIT. V-VEL DISTR.
0.000000	INIT. TEMP. DISTR.
0	# OF INTERM. SAVINGS
0.000000	UNORTH
0.000000	USOUTH
0.000000	VWEST
0.000000	VEAST

0.000000	U-NORTH	FREQ.
0.000000	U-SOUTH	FREQ.
0.000000	U-WEST	FREQ.
0.000000	U-EAST	FREQ.